Mathematische und logische Grundlagen der Linguistik

Kapitel 3:

Grundbegriffe der Aussagenlogik

Grundbegriffe der Aussagenlogik 1

Die Aussagenlogik ist ein Zweig der formalen Logik, der die Beziehungen zwischen Aussagen und Aussagenverbindungen untersucht.

Aussagen sind abstrakte Begriffe, die auch Propositionen genannt werden und in der Alltagssprache durch Sätze ausgedrückt werden.

Dabei kommt es in der Aussagenlogik nicht auf den konkreten Inhalt der Aussagen an, sondern nur auf die Entscheidbarkeit, ob eine Aussage wahr oder falsch ist.

Grundbegriffe der Aussagenlogik 2

Was ist eine Aussage?

Eine Aussage ist das, was durch einen Aussagesatz ausgedrückt wird, wenn wir damit eine Feststellung über einen Sachverhalt treffen.

Grundbegriffe der Aussagenlogik 3

Die folgenden Sätze drücken zwei verschiedene Aussagen aus, wovon die erste wahr und die zweite falsch ist.

- a. Der Mars ist ein Planet.
- b. Der Mond ist ein Planet.

Die nächsten beiden Sätze drücken die gleiche Aussage aus:

- a. Columbus entdeckte Amerika
- b. Amerika wurde von Columbus entdeckt

Grundbegriffe der Aussagenlogik 4

Der nächste Satz drückt ebenfalls eine Aussage aus:

- Peter liebt Maria, aber sie verabscheut ihn.

Sie ist jedoch aus zwei einfacheren Aussagen zusammengesetzt, die wiedergegeben werden können durch:

- a. Peter liebt Maria.
- b. Maria verabscheut Peter.

Man nennt solche komplexen Aussagen Aussagenverbindungen. Die Verknüpfung geschieht hier alltagssprachlich durch das Wort *aber* (in der Bedeutung 'und'). Dabei wird angenommen, daß die Wahrheit der Aussagenverbindung sich aus der Wahrheit der elementaren Aussagen "berechnen" läßt.

Grundbegriffe der Aussagenlogik 5

In der formalen Logik werden Aussagen und Aussagenverbindungen durch eine formale Sprache ausgedrückt.

Wie bei natürlichen Sprachen unterscheidet man auch bei formalen Sprachen zwischen der Syntax und der Semantik von Ausdrücken.

- Die Syntax einer Sprache legt durch Regeln fest, wie die Ausdrücke der Sprache gebildet werden können.
- Die Semantik legt die Bedeutung oder Funktion der Ausdrücke fest.

Grundbegriffe der Aussagenlogik 6

Die Sprache der Aussagenlogik ist sowohl hinsichtlich ihrer Syntax als auch ihrer Semantik eine sehr einfache Sprache.

Sie bildet jedoch die Grundlage für die sehr viel ausdrucksfähigere und für die Linguistik bedeutsamere Prädikatenlogik, die im nächsten Kapitel behandelt wird. Von daher ist es wichtig, die Grundlagen der Aussagenlogik zu kennen.

Grundbegriffe der Aussagenlogik: Syntax

Wir können die Aussagenlogik zunächst als ein Kalkül in dem in Kapitel 2. definierten Sinne auffassen. Ausgehend von einem Inventar von Grundelementen (dem Vokabular) ist durch Regeln genau festzulegen, welche der aus den Grundelementen bildbaren Zeichenketten zulässig oder ‘wohlgeformt’ sind und welche nicht.

Syntax der Aussagenlogik: Vokabular

Das Vokabular des Aussagenkalküls setzt sich aus folgenden Zeichenklassen zusammen :

- Aussagenvariable: p, q, r, s, t …
- Logische Konstante: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$
- Hilfssymbole: '(', ')', '[', ']', '{', '}'

Syntax der Aussagenlogik: Formeln

Ein wohlgeformter Ausdruck ist eine Formel.

Formeln sind:

- $p \wedge q \Rightarrow r$
- $p \wedge (p \vee q) \Rightarrow \neg r$
- $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow q \wedge p$

Keine Formeln sind:

- $\wedge (q \Rightarrow r]$
- $]p \wedge (p \wedge \vee q() \uparrow r$
- $p \neg q \Leftrightarrow q \wedge p$

Syntax der Aussagenlogik: Formationsregeln 1

Regel 1: eine Aussagenvariable ist eine Formel.

Regel 2: ist P eine Formel, dann ist auch $\neg P$ eine Formel.

Regel 3: sind P und Q Formeln, dann sind
a. $(P \wedge Q)$
b. $(P \vee Q)$
c. $(P \Rightarrow Q)$
ebenfalls Formeln.

Regel 4: Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

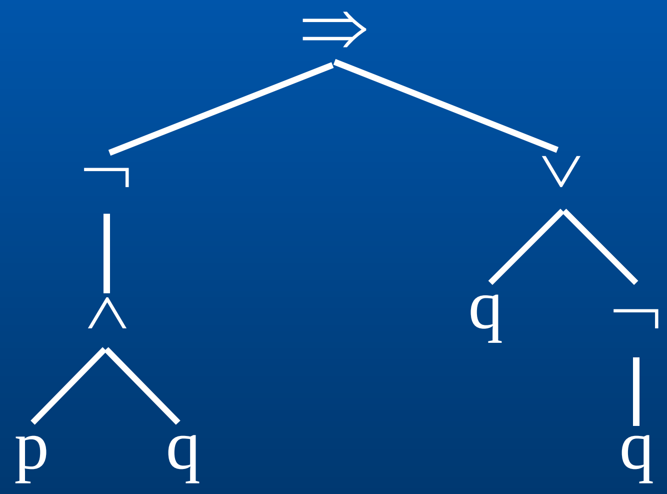
Syntax der Aussagenlogik: Formationsregeln 2

Ableitungsbeispiel:

(1)	p	Regel 1
(2)	q	Regel 1
(3)	$\neg q$	Regel 2, (2)
(4)	$(p \wedge q)$	Regel 3a, (1), (2)
(5)	$\neg(p \wedge q)$	Regel 2, (4)
(6)	$(q \vee \neg q)$	Regel 3b, (2), (3)
(7)	$(\neg(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee \neg q))$	Regel 3c, (5), (6)

Syntax der Aussagenlogik: Formationsregeln 3

Syntaxbaum für den Ausdruck $(\neg(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee \neg q))$



Syntax der Aussagenlogik: Formationsregeln 4

Bei der strikten Anwendung der Formationsregeln können komplizierte Klammeraustrücke entstehen, die man jedoch vereinfachen kann, wenn man für die logischen Konstanten Regeln für die Reihenfolge der Auswertung definiert, sog. Bindungsregeln. Es gelten folgende Regeln

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, d.h. $\neg p \wedge q$ ist zu lesen als $(\neg p) \wedge q$ und nicht als $\neg(p \wedge q)$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$, d.h. $p \wedge q \vee r$ ist zu lesen als $(p \wedge q) \vee r$ und nicht als $p \wedge (q \vee r)$
- $\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow$, d.h. $p \vee q \Rightarrow r$ ist zu lesen als $(p \vee q) \Rightarrow r$ und nicht als $p \vee (q \Rightarrow r)$

Semantik der Aussagenlogik: Regeln

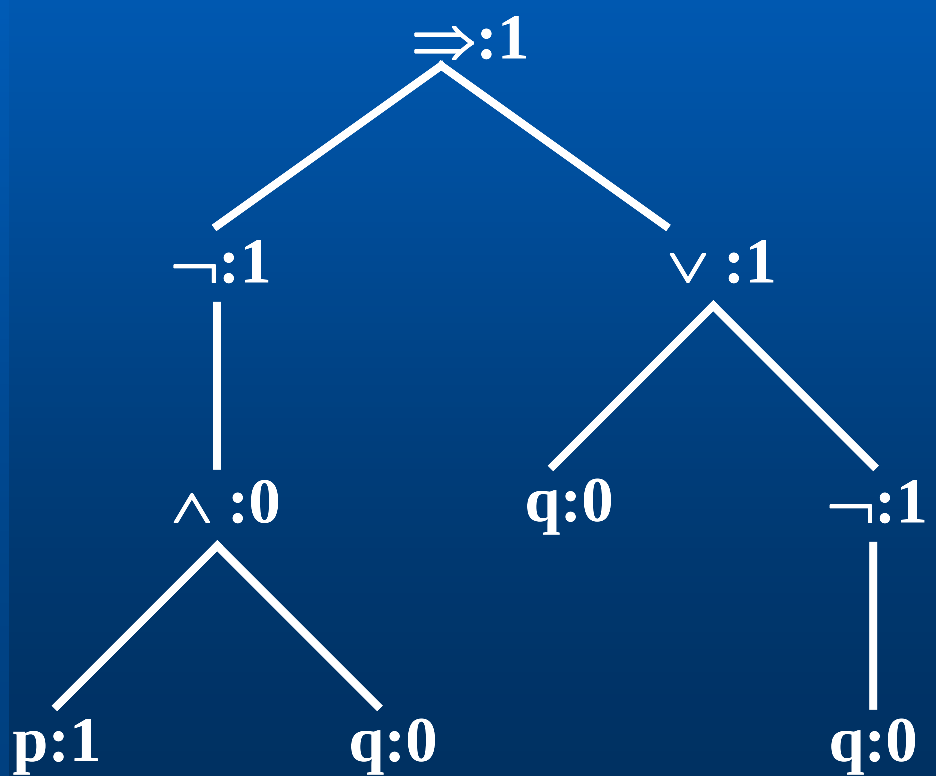
Semantische Regeln

- Regel 1: eine Variable kann die Werte 1 oder 0 annehmen.
- Regel 2: $f(P \wedge Q) = 1$ gdw $f(P) = 1$ und $f(Q) = 1$, 0 sonst
- Regel 3: $f(P \vee Q) = 0$ gdw $f(P) = 0$ und $f(Q) = 0$, 1 sonst
- Regel 4: $f(P \Rightarrow Q) = 0$ gdw $f(P) = 1$ und $f(Q) = 0$, 1 sonst
- Regel 5a: $f(\neg P) = 0$, gdw $f(P) = 1$
- Regel 5b: $f(\neg P) = 1$, gdw $f(P) = 0$

Semantik der Aussagenlogik: Kompositionalität

	¬	(p	∧	q)	⇒	(q	∨	¬	q)
	1	1	0	0	1	0	1	1	0
Schritte:	8	1	5	2	9	3	7	6	4

Semantik der Aussagenlogik: Kompositionalität



Semantik der Aussagenlogik: Tabellen

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$q)$
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
8	1	5	2	9	3	7	6	4

Semantik der Aussagenlogik: Die wahrheitsfunktionen Eigenschaften der logischen Konstanten

Negation: $\neg P$:
Es ist nicht der Fall daß *P*, wobei $\neg P$ falsch ist wenn *P* wahr ist, und wahr, wenn *P* falsch ist.

Konjunktion: $P \wedge Q$:
Sowohl *P* als auch *Q*, wobei $P \wedge Q$ wahr ist gdw sowohl *P* als auch *Q* wahr sind; andernfalls ist es falsch.

Disjunktion: $P \vee Q$:
Entweder *P* oder *Q*, oder beides, wobei $P \vee Q$ falsch ist gdw sowohl *P* als auch *Q* falsch ist; andernfalls ist es wahr.

Implikation: $P \Rightarrow Q$:
Wenn *P* dann *Q*, wobei $P \Rightarrow Q$ falsch ist gdw *P* wahr ist und *Q* falsch; andernfalls ist es wahr.

Semantik der Aussagenlogik: Die Konjunktion

Konjunktion

- Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist die Konjunktion $P \wedge Q$ eine wahre Aussage genau dann, wenn sowohl P als auch Q wahr ist. Andernfalls ist sie falsch. Dem entspricht folgende Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \wedge Q$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*f*
f	*f*	*f*

Semantik der Aussagenlogik: Die Disjunktion

Disjunktion

- Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist die Disjunktion $P \vee Q$ eine falsche Aussage genau dann, wenn sowohl P als auch Q falsch sind. Andernfalls ist sie wahr. Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \vee Q$
w	*w*	*w*
w	*f*	*w*
f	*w*	*w*
f	*f*	*f*

Semantik der Aussagenlogik: Das Konditional

Konditional (Implikation)

- Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist das Konditional $P \Rightarrow Q$ eine falsche Aussage genau dann, wenn P wahr und Q falsch sind. Andernfalls ist sie wahr.

Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*w*
f	*f*	*w*

Semantik der Aussagenlogik: Die Negation

Negation

- Ist P eine Aussage, dann ist die Negation $\neg P$ wahr, wenn P falsch ist, und falsch, wenn P wahr ist.

Wahrheitstafel:

P	$\neg P$
w	*f*
f	*w*

Komplexe Aussagenverbindungen 1

Aussagenverbindungen können auch aus mehr als zwei Aussagen bestehen. Man kann sich solche komplexen Ausdrücke aus Aussagen und einfachen Aussagenverbindungen zusammengesetzt denken.

Wir haben z.B. formuliert: wenn P und Q Aussagen sind, dann ist auch $P \Rightarrow Q$ eine Aussage. Eine Aussagenverbindung ist eine Aussage.

Man hat damit gleich eine Bildungsregel für komplexe Aussagenverbindungen. $P \Rightarrow Q$ bleibt eine Aussage, auch wenn man P oder Q durch beliebige Aussagenverbindungen ersetzt.

Komplexe Aussagenverbindungen 2

Um den Bezug der Funktoren eindeutig zu machen, müssen die substituierten Aussagenverbindung eingeklammert werden.

Ersetzt man z.B. q in $p \Rightarrow q$ durch $q \vee r$, erhält man die komplexe Aussagenverbindung $p \Rightarrow (q \vee r)$.

Wie wir gesehen haben gibt es jedoch bestimmte Konventionen für die Bindekraft der Funktoren

$\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow$, d.h. $\neg$ bindet am stärksten, $\Rightarrow$ am schwächsten.

Unter dieser Voraussetzung kann der Ausdruck auch als $p \Rightarrow q \vee r$ geschrieben werden.

Komplexe Aussagenverbindungen 3

Für komplexe Aussagenverbindungen gelten somit die gleichen Wahrheitsbedingungen wie für einfache Aussagenverbindungen.

Die Aussage $p \Rightarrow (q \vee r)$ ist nach der Definition des Konditionals nur dann falsch, wenn p wahr ist und $q \vee r$ falsch.

Die Aussage $q \vee r$ wiederum ist dann falsch, wenn sowohl q als auch r falsch ist. Folglich ist $p \Rightarrow (q \vee r)$ genau dann falsch, wenn p wahr ist und q und r falsch.

Durch schrittweise Anwendung der Wahrheitsfunktionen für die einzelnen Funktoren (z.B. mithilfe der Wahrheitstabellen) lassen sich die Wahrheitswerte von komplexen Aussagenverbindungen berechnen.

Komplexe Aussagenverbindungen 4

	p	$\Rightarrow$	q	$\vee$	r
	w	*w*	*w*	*w*	*w*
	w	*w*	*w*	*w*	*f*
	w	*w*	*f*	*w*	*w*
	w	*f*	*f*	*f*	*f*
	f	*w*	*w*	*w*	*w*
	f	*w*	*w*	*w*	*f*
	f	*w*	*f*	*w*	*w*
	f	*w*	*f*	*f*	*f*
Schritte	1	5	2	4	3

Tautologie und Kontradition: Tautologie

Tautologie

Eine Aussagenverbindung ist eine Tautologie, wenn sie unter allen Interpretationen wahr ist.

Eine einfache Tautologie ist z.B.

Es ist nicht der Fall, daß Hans dumm ist und nicht dumm ist.

$\neg(p \wedge \neg p)$

Tautologie und Kontradition: Kontradiktion

Kontradiktion

Eine Aussagenverbindung ist eine Kontra-diktion, wenn sie unter allen Interpreta-tionen falsch ist.

Der folgende Satz eine Kontradiktion:

Hans ist ehrlich und unehrlich.

$p \wedge \neg p$

Tautologie und Kontradition: Kontingenz

erfüllbar

Aussagenverbindungen, die weder tautolo-gisch noch kontradiktorisch sind, heißen erfüllbar oder kontingent.

Tautologie und Kontradition: Schlüsse

Prämissen:

- Entweder zahlt die Regierung Lösegeld, oder die Terroristen werden ihre Opfer töten
- Die Regierung wird jedoch kein Lösegeld zahlen

Konklusion:

- Folglich werden die Terroristen ihre Opfer töten.

Tautologie und Kontradition: Schlüsse

Setzen wir

- *p = Die Regierung zahlt Lösegeld* und
- *q = Die Terroristen werden ihre Opfer töten*,

dann hat die erste Prämisse die Form $p \vee q$,
die zweite die Form $\neg p$.

Die Konklusion soll aus der Konjunktion der Prämissen folgen, d.h. aus $(p \vee q) \wedge \neg p$.

Der gesamte Schluß wird also durch die folgende Aussagenverbindung dargestellt:

- $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Tautologie und Kontradition: Schlüsse

	(p	$\vee$	*q)*	$\wedge$	$\neg$	*p*	$\Rightarrow$	*q*
	w	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*	***w***	*w*
	w	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	***w***	*f*
	f	*w*	*w*	*w*	*w*	*f*	***w***	*w*
	f	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*	***w***	*f*
Schritte	1	5	2	7	6	3	8	4

Tautologie und Kontradition: Schlüsse

Was geschieht nun aber, wenn wir die zweite Prämisse und die Konklusion jeweils durch ihre Negation ersetzen, d.h. durch *Die Regierung wird Lösegeld zahlen* bzw. *Die Terroristen werden ihre Opfer nicht töten?*

	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	p	$\Rightarrow$	$\neg$	q
	w	*w*	*w*	*w*	*w*	***f***	*f*	*w*
	w	*w*	*f*	*w*	*w*	***w***	*w*	*f*
	f	*w*	*w*	*f*	*f*	***w***	*f*	*w*
	f	*f*	*f*	*f*	*f*	***w***	*w*	*f*
Schritte	1	5	2	6	3	8	7	4

Logische Äquivalenz

Verschiedene aussagenlogische Formeln können hinsichtlich ihres wahrheitsfunktionalen Verhaltens miteinander verglichen werden. Dabei interessieren vor allem solche Ausdrücke, die unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind. Solche Ausdrücke heißen logisch äquivalent.

Logische Äquivalenz

logisch äquivalent

Zwei aussagenlogische Formeln P und Q heißen logisch äquivalent (symbolisch: $P \equiv Q$) genau dann, wenn sie unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind, d.h. wenn sie für jede konsistente Bewertung ihrer Elementaraussagen stets den gleichen Wahrheitswert haben.

Logische Äquivalenz

Äquivalente Formeln haben die gleichen Wahrheitstafeln. Die Äquivalenz setzt normalerweise voraus, daß die Formeln aus den gleichen elementaren Aussagen zusammengesetzt sind.

Mit konsistenter Bewertung ist gemeint, daß in beiden Formeln einer Elementaraussage nicht verschiedene Wahrheitswerte zugewiesen werden dürfen.

Beispielsweise sind die Ausdrücke $\neg(p \vee q)$ und $\neg p \wedge \neg q$ logisch äquivalent, d.h. es gilt $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Der Nachweis erfolgt durch Berechnung der Wahrheitstafeln.

Logische Äquivalenz

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
w	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*	*f*
w	*f*	*w*	*f*	*f*	*w*	*f*
f	*w*	*w*	*f*	*w*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*

Logische Äquivalenz

Äquivalenzen zwischen Ausdrücken lassen sich auch per Definition einführen, wobei jedoch gleichzeitig zusätzliche syntaktische Mittel eingeführt werden. Beispiel: *Wenn p dann q, und wenn q dann p*: $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.

p	$\Rightarrow$	q	$\wedge$	q	$\Rightarrow$	p
w	*w*	*w*	***w***	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	***f***	*f*	*w*	*w*
f	*w*	*w*	***f***	*w*	*f*	*f*
f	*w*	*f*	***w***	*f*	*w*	*f*

Logische Äquivalenz

Diese Formel ist genau dann wahr, wenn die elementaren Teilaussagen jeweils den gleichen Wahrheitswert aufweisen. Man kann sie als eigenständige Wahrheits-funktion zu betrachten und durch einen eigenen Funktor $\Leftrightarrow$ zu bezeichnen.

Bikonditional (Äquivalenz)

Das Bikonditional ist definiert durch:

$$P \Leftrightarrow Q :\Leftrightarrow P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$$

Sind P und Q logische Formeln, so ist das Bikonditional $P \Leftrightarrow Q$ eine wahre Aussage, wenn P und Q den gleichen Wahrheitswert haben, andernfalls ist es eine falsche Aussage.