Kapitel 1.
Einleitung

1.1. Der Gegenstand der Linguistik

Linguistik ist die internationale Bezeichnung für Sprachwissenschaft. Die Aufgabe der Sprachwissenschaft ist die Beschreibung und Erklärung des Phänomens Sprache. Man könnte also sagen, das 'Phänomen Sprache' sei der Gegenstand der Sprachwissenschaft. Wenn man sich jedoch näher ansieht, in welchen Kontexten das deutsche Wort *Sprache* verwendet wird (*deutsche Sprache, eine ausdrucksvolle Sprache, er hat die Sprache verloren, Blumensprache, Computersprache)*, und wie unterschiedlich verschiedene Sprachforscher ihren Gegenstand definieren: als Organismus (19. Jhd.), als symbolisches Kommunikationssystem (SAPIR 1921), als Gesamtheit potentieller Äußerungen in einer Sprachgemeinschaft (BLOOMFIELD 1926), als Menge von Sätzen eines formalen Systems (CHOMSKY 1957), als Tätigkeit (HALLIDAY ET AL. 1964), scheint es jedoch sinnvoll, hier eine begriffliche und terminologische Unterscheidung zu treffen.[1]

1.1.1. MATERIALOBJEKT VS. FORMALOBJEKT

Bereits Ferdinand de Saussure unterschied in seinen Vorlesungen Anfang des Jahrhunderts[2] zwischen "la matière de la linguistique" und "l'objet de la linguistique". Die Einleitung seines später sehr einflußreichen *Cours de linguistique générale* (1916) enthält ein sehr kurzes zweites Kapitel, in dem es heißt: "La matière de la linguistique est constituée d'abord par toutes les manifestations du langage humain." (SAUSSURE 1916: 20)[3] Das unmittelbar folgende Kapitel hat jedoch die Überschrift *Objet de la linguistique* und im ersten Abschnitt dieses Kapitels sagt de Saussure "Bien loin que l'objet précède le point de vue, on dirait que c'est le point de vue qui crée l'objet"[4] (SAUSSURE 1916: 23).

Ferdinand de Saussure unterscheidet also zwischen dem Stoff und dem Gegenstand der Linguistik, wobei letzterer von der Betrachtungsweise des Forschers abhängt.

Nach DE SAUSSURE ist diese Unterscheidung eine Besonderheit der Linguistik. Einem Vorschlag des russischen Psycholinguisten A.A. LEONT'EV (1971: 15ff.) folgend, möchte ich jedoch allgemein zwischen dem MATERIALOBJEKT und dem FORMALOBJEKT einer Wissenschaft unterscheiden. Dies ist allerdings keine neue Unterscheidung. Schon die Scholastiker haben zwischen dem konkreten *obiectum materiale* und dem abstrakten *obiectum formale* unterschieden.

Definition 1.1. *Materialobjekt*

> Das MATERIALOBJEKT (= OBJEKT bei Leont'ev) einer Wissenschaft besteht aus der Gesamtheit der zu untersuchenden konkreten Erscheinungen der objektiven Realität, die vor einer Wissenschaft und unabhängig von ihr, vom Forscher, seinem Bewußtsein und seinen Betrachtungsweisen existieren.

---

[1] Vgl. die ausführlichere Diskussion im Skript *Grundkurs Sprachwissenschaft* (1996), Kapitel 1.

[2] 1916 postum von einigen seiner Studenten auf der Grundlage der Vorlesungsskripten als *Cours de linguistique générale* veröffentlicht.

[3] Der Stoff der Sprachwissenschaft umfaßt alle Manifestationen der menschlichen Rede

[4] Weit davon entfernt, daß der Gegenstand der Betrachtungsweise vorausgeht scheint es doch eher so, daß die Betrachtungsweise den Gegenstand erst schafft.

Eine gute Umschreibung des Materialobjekts der Linguistik ist die des britischen Linguisten R.H. Robins:

> Language in all its forms and manifestations, that is all the languages of the world and all the different uses to which in the various circumstances of mankind they are put, constitutes the field of the linguist. He seeks a scientific understanding of the place of language in human life, and of the ways in which it is organized to fulfil the needs it serves and the functions it performs. (ROBINS 1964: 2f.)

In diesem Sinne kann man sagen, daß verschiedene Wissenschaften das gleiche Materialobjekt untersuchen können, wenn auch aus unterschiedlichem Blickwinkel und mit unterschiedlichen Erkenntnisinteressen. So ist das 'Phänomen Sprache' das Materialobjekt (wenn auch nicht das einzige) von so verschiedenen Disziplinen wie Philosophie, Psychologie, Soziologie, Physiologie, Medizin, etc. Obwohl sie es alle mit dem gleichen Objekt zu tun haben, betrachten sie es aus ganz unterschiedlichen Blickwinkeln und mit ganz verschiedenen Zielsetzungen und schaffen damit je verschiedene Formalobjekte als wissenschaftliche Untersuchungsgegenstände.

Sobald wir unsere Aufmerksamkeit auf bestimmte Eigenschaften eines gegebenen Materialobjektes richten und dabei andere Eigenschaften des gleichen Objektes — wenn auch nur vorübergehend — außer Acht lassen, machen wir eine ABSTRAKTION.[5]

Das Resultat einer solchen Abstraktion können wir ein abstraktes Objekt nennen.

Nehmen wir ein Beispiel. Vom rein physikalischen Standpunkt aus betrachtet ist der Redefluß als stoffliche Manifestation einer sprachlichen Äußerung ein Kontinuum, weil die Bewegungen der Sprechorgane, die an seiner Realisierung beteiligt sind (Lippen und Zunge) kontinuierlich sind. Wir haben jedoch gelernt — insbesondere im Zusammenhang mit der Alphabetisierung — , die an sich kontinuierliche Rede als Folge von wohlunterschiedenen Einheiten aufzufassen. Wir können dies bewerkstelligen, indem wir nur extreme Stellungen der Sprechorgane berücksichtigen und die Übergänge zwischen diesen Extrempositionen außer Acht lassen. Indem wir dies tun schaffen wir abstrakte Objekte, die wir Laute nennen. Die Menge der abstrakten Objekte in diesem Sinne konstituieren das FORMALOBJEKT einer Wissenschaft.

Definition 1.2. *Formalobjekt*

> Das FORMALOBJEKT (= Gegenstand bei LEONT'EV) einer Wissenschaft ist die Gesamtheit der Abstraktionen, die dadurch geschaffen werden, daß das Materialobjekt aus unterschiedlichen Blickwinkeln und mit unterschiedlichen Erkenntnisinteressen untersucht wird.

Da das Formalobjekt einer Wissenschaft erst durch die Betrachtungsweise entsteht, ist es klar, daß es der geschichtlichen Entwicklung dieser Wissenschaft unterworfen ist. Die Zusammensetzung des Formalobjektes einer Wissenschaftlichen Disziplin zu einem bestimmten Zeitpunkt ist von einer Reihe von Faktoren wie z.B. den folgenden abhängig:

1. dem Entwicklungsstand der Wissenschaft,
2. den subjektiven und objektiven Erkenntnisinteressen,
3. den wissenschafts- und erkenntnistheoretischen Grundpositionen des Forschers,
4. gewissen Abgrenzungsproblemen.

Mögliche Gegenstände der Linguistik sind z.B. (nach WUNDERLICH 1971: 121):

---

[5] 'Abstrahieren' heißt wörtlich 'wegnehmen'.

1. Zusammenhänge in vorliegenden ÄUßERUNGEN und Texten ... (deskriptiver Strukturalismus),
2. die menschliche Fähigkeit, sprachliche Konstruktionsmittel zu beherrschen und mit ihnen unbegrenzt viele und neuartige Äußerungen und Texte hervorzubringen und zu erkennen ... (generative Grammatik),
3. die menschliche Fähigkeit, sich mittels Äußerungen in einem sozialen und gegenständlichen Kontext zu verständigen (Kommunikationstheorie),
4. die geographische und kulturell bedingte Verschiedenheit von sprachlichen Konstruktionsmitteln (Sprachtypologie, Dialektologie),
5. die sozial bedingte Verschiedenheit von sprachlichen Verhaltensweisen (Soziolinguistik),
6. die Entwicklung der individuellen Fähigkeit, sprachliche Konstruktionsmittel zu beherrschen und sich mit ihrer Hilfe zu verständigen, in Abhängigkeit von den primären und sekundären sozialen Kommunikationsprozessen (Sozialisationstheorie, Theorie der Kindersprache),
7. die historische Veränderung von sprachlichen Konstruktionsmitteln innerhalb eines Sprachsystems, in Abhängigkeit von dem Kontakt mit anderen Sprachen, und von sozialen und wirtschaftlichen Faktoren (Sprachgeschichte),
8. Erscheinungen der normalerweise nicht erwartbaren Abweichungen in sprachlichen Äußerungen und Texten oder in sprachlichen Kommunikationen,
   - aufgrund von Gehirnschädigungen oder Schädigungen des Artikulations- und Gehörapparats (medizinische Linguistik, Aphasie- und Gehörlosenforschung),
   - aufgrund von autoritären Sozialbeziehungen, psychologischen Verdrängungen, usw. (Psychoanalyse, Schizophrenieforschung),
   - aufgrund bewußter Prozeduren (z.B. Linguistische Poetik).

Aufgrund ihrer Gegenstände läßt sich eine Wissenschaft meist in Teildisziplinen gliedern (in der Linguistik z.B. Grammatiktheorie, historische Linguistik, Psycholinguistik, Soziolinguistik). Diese Teildisziplinen bilden jedoch kein geschlossenes System und Überschreiten oft die Grenzen der Einzelwissenschaft.

1.2. Linguistik als Erfahrungswissenschaft

Die Linguistik ist eine empirisch-theoretische Wissenschaft.[6] Sie ist eine empirische Wissenschaft (Erfahrungswissenschaft), insofern Erfahrungen am Objekt Sprache ihre Basis sind. Sie ist eine theoretische Wissenschaft, insofern sie über die Beschreibung der äußeren Eigenschaften ihres Objektes hinaus seine allgemeinen Gesetzmäßigkeiten erfassen will, und dies ist nur über eine Theorie möglich. Das Ziel der Linguistik wie anderer Wissenschaften ist es, von der Erscheinung ihres Objekts zu seinem Wesen vorzudringen.

Definition 1.3. *Erscheinung*

> Unter Erscheinung versteht man die "Gesamtheit der äußeren Eigenschaften der Dinge, Prozesse usw., die uns durch die Sinne, durch die Anschauung, die unmittelbare Erfahrung gegeben sind." (KLAUS/BUHR 1971, *s.v.* Erscheinung)

Definition 1.4. *Wesen*

> Unter Wesen versteht man die "Gesamtheit der allgemeinen, invarianten Bestimmungen [Merkmale] eines Dinges, Prozesses usw., die diesem notwendigerweise zukommen. Das Wesen ... ist im Gegensatz zur Erscheinung der Sinneserkenntnis nicht unmittelbar zugänglich." (KLAUS/BUHR 1971, *s.v.* Wesen)

---

[6] Zum Verhältnis von Empirie und Theorie allgemein vgl. KLAUS/BUHR 1971 *s.v.* Empirisches und Theoretisches.

Das Wesen der Dinge manifestiert sich in der Erscheinung und ist nur über die Analyse der Erscheinung erkennbar.

Den allgemeinen Begriffen Erscheinung und Wesen entsprechen in der Linguistik die Begriffe LINGUISTISCHE DATEN und LINGUISTISCHE FAKTEN. (cf. CHOMSKY 1964: 28ff.). Zur Verdeutlichung des Unterschiedes ein Beispiel:

Im Englischen existiert die Form *brick* (= Ziegelstein), die Formen *blick* und *bnick* kommen dagegen nicht vor. Das sind Feststellungen von linguistischen Daten. Daten umfassen also sowohl die Existenz als auch die Nicht-Existenz von Erscheinungen. Die Analyse dieser und weiterer Daten zeigt nun, daß generell in Anlautverbindungen *n* nur mit *s* zulässig ist (z.B. *snick* 'Kerbe'; die Verbindungen *kn-, gn-* werden /n/ gesprochen), daß *l* nur in Verbindung mit einem Dental (ausgenommen *s*) nicht zulässig ist (**tlick, *dlick,* aber *slick* 'glatt') und daß *r* nur in Verbindung mit *s* nicht zulässig ist (**srick*). Läßt man die Verbindung mit *s* außer acht, kann man allgemein formulieren:

1. *n* kommt in Anlautverbindungen nicht vor;
2. *l* kommt nur in Anlautverbindungen mit Dental nicht vor.

Das sind Aussagen über linguistische Fakten.

Die Nicht-Existenz von *blick* und *bnick* hat also verschiedenen Status; im Falle von *blick* ist sie zufällig (*blick* ist nach den Gesetzmäßigkeiten der englischen Sprache möglich), im Falle von *bnick* ist sie systematisch (*bnick* ist nach den Gesetzmäßigkeiten des Englischen nicht möglich).

Aussagen über Fakten sind theoretische Aussagen. Inwieweit solche Aussagen das 'Wesen' treffen, muß die Praxis erweisen. Daß die Anlautgesetze 'wesenhafte' Züge der englischen Sprache beschreiben, zeigt z.B. die Behandlung von Anlautverbindungen in Fremd- und Kunstwörtern:

- In Fremdwörtern werden Anlautverbindungen, die den Anlautgesetzen widersprechen, verändert: Fremdwörter mit *ps-* z.B. (*psychology, psalm*) werden /s-/ ausgesprochen.
- Es werden nur Kunstwörter mit Anlautverbindungen gebildet, die nach den Anlautgesetzen zulässig sind.

Hauptaufgabe der Linguistik ist die Beschreibung Linguistischer Fakten. Die Erkenntnis Linguistischer Fakten ist nur möglich über die Analyse Linguistischer Daten. Die erste Aufgabe des Linguisten besteht somit in der Sicherung seiner Daten. Insoweit ist seine Tätigkeit rein empirisch. Zur Bewertung linguistischen Tuns hat Noam Chomsky Adäquatheitskriterien vorgeschlagen, für die korrekte Wiedergabe der Daten das Kriterium der BEOBACHTUNGSADÄQUATHEIT:

Definition 1.5. *Beobachtungsadäquat*

> Eine linguistische Beschreibung, die nur die Daten korrekt wiedergibt, wird BEOBACHTUNGSADÄQUAT genannt. (CHOMSKY 1964: 29)

Die Tätigkeit des Linguisten ist eine theoretische, wenn es um die Erkennung und Beschreibung linguistischer Fakten geht. Eine Beschreibung, welche die linguistischen Fakten korrekt darstellt, nennt Chomsky BESCHREIBUNGSADÄQUAT:

Definition 1.6. *Beschreibungsadäquat*

> Eine linguistische Beschreibung, die die Fakten korrekt wiedergibt und damit die Daten erklärt, wird BESCHREIBUNGSADÄQUAT genannt.

Neben diesen 1964 zuerst eingeführten Adäquatheitsebenen nennt Chomsky noch eine dritte Ebene, die ERKLÄRUNGSADÄQUATHEIT, die sich allerdings auf linguistische Theorien bezieht:

Definition 1.7. *Erklärungsadäquat*

Eine Linguistische Theorie ist ERKLÄRUNGSADÄQUAT, wenn sie beschreibungsadäquate Deskriptionen liefert.

1.3. Linguistik als Strukturwissenschaft

Der Begriff Struktur ist heutzutage allgegenwärtig: Man spricht von Gesellschaftsstruktur, Wirtschaftsstruktur, Infrastruktur, Kristallstruktur, Strukturplan etc. und eben auch von Sprachstruktur.

Das unmittelbare Gegenstück ist der Begriff System. Systeme sind strukturiert, Strukturen sind Strukturen von Systemen.

Die Begriffe System und Struktur sind grundlegend für die moderne Linguistik, die durch Bezeichnungen wie Strukturalismus, strukturalistisch und strukturell charakterisiert wird. Dabei hat allerdings die Bezeichnung Strukturalismus bereits eine spezielle Bedeutung angenommen: sie benennt eine bestimmte inzwischen überholte Richtung der modernen Linguistik.[7]

Zwischenzeitlich ist auch die Bezeichnung Systemlinguistik aufgekommen, die oft im abwertenden Sinne von Sprachwissenschaftlern gebraucht wird, die die Hauptaufgabe der Linguistik nicht in der Beschreibung des Sprachsystems sehen.

WUNDERLICH (1971: 92f.) unterscheidet drei Verwendungsweisen des Strukturbegriffs:

1. Struktur als Eigenschaft der Wirklichkeit

   Die Welt erscheint uns nicht als chaotisch oder amorph, vielmehr stellen wir fest, daß sich Erscheinungen voneinander abheben, daß sie von unterschiedlicher Wichtigkeit für uns sind, daß sie sich wiederholen können, daß sie in charakteristischer Weise voneinander abhängen. Eine Erklärung hierfür liefert die Annahme, daß die Welt und die Art, in ihr zu existieren und zu kommunizieren, selbst wohlgegliedert sind. Strukturen werden als Eigenschaften der Wirklichkeit verstanden. (WUNDERLICH 1971: 92)

2. Strukturalismus als Verfahren

   Unter der Annahme, daß die Welt strukturiert ist, hat es Sinn, methodische Prozeduren zu entwickeln, um die Art und die Form der Strukturen aufzudecken. Im linguistischen Strukturalismus verstand man unter strukturellem Vorgehen genau dies: nämlich die Entwicklung, Formulierung und Anwendung regulärer Entdeckungsprozeduren zur Auffindung von sprachlichen Strukturen. (93)

3. Strukturen als Eigenschaften von Theorien

   Erkenntnis bildet sich, indem Erfahrungen durch gewisse Schemata filtriert werden. In den empirisch-analytischen Wissenschaften wird die Erkenntnis in einer systematischen Form angestrebt, sie wird niedergelegt in Gestalt von Theorien. Strukturen sind Eigenschaften dieser Theorien, also eines wissenschaftlichen Konstrukts. In diesem Sinne läßt sich etwa von physikalischen oder linguistischen oder soziologischen Strukturen sprechen. /...../ Die formale Struktur der Theorie steht ... als ein (Abstraktions-) Modell, oder als ein Bild, für die Zusammenhänge der Wirklichkeit. Die Beschreibungsstruktur rekonstruiert bzw. modelliert die Struktur des Beschriebenen. (93)

Die Linguistik ist eine Strukturwissenschaft im Sinne dieser drei Verwendungsweisen des Strukturbegriffes:

1. Sie geht von der Annahme aus, daß ihr Objekt, die Sprache, strukturiert ist,
2. sie entwickelt methodische Verfahren zur Aufdeckung dieser Strukturen,
3. sie konstruiert Theorien, die diese Strukturen abbilden sollen.

---

[7] Zur Entwicklung der Linguistik als Strukturwissenschaft vgl. Bierwisch (1966).

1.4. Literatur

BIERWISCH, MANFRED

1966 Strukturalismus. Geschichte, Probleme und Methoden. In: *Kursbuch* **5** (1966), 77–152. Verbesserter Abdruck in: Ihwe (1971), 17–90.

BLOOMFIELD, LEONARD

1926 A Set of Postulates for the Science of Language. In: *Language* **2**, 153–64.

CHOMSKY, NOAM

1957 *Syntactic Strucures.* The Hague: Mouton.

1964 *Current Issues in Linguistic Theory.* The Hague: Mouton.

HALLIDAY, M.A.K, ANGUS MCINTOSH, PETER STREVENS

1964 *The Linguistic Sciences and Language Teaching*. London: Longmans.

IHWE, JENS (HG.)

1971 *Literaturwissenschaft und Linguistik. Ergebnisse und Perspektiven. Bd. 1: Grundlagen und Voraussetzungen.* Frankfurt: Athenäum.

KLAUS, GEORG UND MANFRED BUHR (HG.)

1971 *Philosophisches Wörterbuch.* Berlin: das europäische buch.

LEONT'EV, A.A.

1971 *Sprache – Sprechen – Sprechtätigkeit*. Stuttgart: Kohlhammer.

ROBINS, R.H.

1964 *General Linguistics. An Introductory Survey.* London: Longmans

SAPIR, EDWARD

1921 *Language.* New York: Harcourt, Brace & World, Inc.

SAUSSURE, FERDINAND DE

1916 *Cours de linguistique générale*. Publié par Charles Bally et Albert Sechehaye, Paris: Payot, 1968.

WUNDERLICH, DIETER

1971 Terminologie des Strukturbegriffs. In: Ihwe (1971), 91–140.

Kapitel 2.
Allgemeine Grundbegriffe

2.1. Vorbemerkung

In dem Maße wie die Linguistik versucht eine exakte Wissenschaft zu sein, erhalten Aussagen über ihre Gegenstände die Form von THEORIEN. Dabei müssen grundsätzlich drei Aspekte unterschieden werden:

1. Der OBJEKTBEREICH, der durch eine Theorie erklärt oder durch ein Modell modelliert werden soll. Dieser ist immer schon im Sinne eines FORMALOBJEKTES (vgl. Kapitel 1.)zu verstehen.
2. Die THEORIE selbst, die den Objektbereich beschreibt und erklärt. Der gleiche Objektbereich kann durch unterschiedliche Theorien erklärt werden.
3. Die SPRACHE, in der eine Theorie ausgedrückt wird. Die gleiche Theorie kann gegebenenfalls durch unterschiedliche Sprachen ausgedrückt werden. Ausdrücke aus verschiedenen Sprachen sind dann ineinander übersetzbar.

Eine Theorie sollte zunächst in (gegebenenfalls terminologisch angereicherter) Alltagssprache ausdrückbar sein. Es hat sich jedoch als vorteilhaft erwiesen, in den Wissenschaften eine spezielle WISSENSCHAFTSSPRACHE zu verwenden. Darüber wird ausführlicher in Abschnitt 2.3. die Rede sein.

2.2. Theorie und Theoriebildung

In den folgenden Abschnitten sollen zunächst kurz Begriffe wie THEORIE, HYPOTHESE, THEORETISCHES KONSTRUKT erläutert werden.

Definition 2.1. *Theorie*

> Eine THEORIE ist ein System von HYPOTHESEN oder eine Menge von solchen Systemen, die zur ERKLÄRUNG bestimmter Phänomenenbereiche entwickelt werden.

Definition 2.2. *Hypothese*

> Eine HYPOTHESE ist eine empirische Verallgemeinerung über einer Menge von Beobachtungsdaten.

Wir können zumindest vier Phasen der THEORIEBILDUNG unterscheiden.

- Sammlung und Beschreibung von empirischen Daten
- Hypothesenbildung
- Theoriebildung
- Überprüfung

PHASE 1

Beobachtungen über bestimmte Phänomene (Daten) werden gesammelt, beschrieben und klassifiziert. So können wir z.B. beobachten, daß bestimmte Holzgegenstände in Wasser schwimmen, während bestimmte (feste) Metallgegenstände untergehen. Zum Zwecke der Beschreibung und Klassifizierung von Beobachtungsdaten werden Beschreibungssprachen geschaffen (z.B. das phonetische Alphabet und die Terminologie der artikulatorischen Phonetik). Das Resultat der Phase 1 ist eine Beschreibung und Klassifizierung einer Menge von Beobachtungsdaten.

PHASE 2

Auf der Grundlage einer Sammlung von beschriebenen und klassifizierten Beobachtungsdaten können wir versuchen Hypothesen zu bilden, wobei eine Hypothese eine empirische Verallgemeinerung über die beobachteten Daten ist. Um bei unserem Beispiel zu bleiben: Nachdem wir in einer großen Anzahl von Fällen festgestellt haben, daß feste Holzgegenstände in Wasser schwimmen, während feste Metallgegenstände untergehen, bilden wir die Hypothesen ALLE FESTEN HOLZGEGENSTÄNDE SCHWIMMEN IN WASSER und ALLE FESTEN METALLGEGENSTÄNDE GEHEN IN WASSER UNTER. Wir sehen jedoch noch keinen Zusammenhang zwischen diesen Hypothesen.

PHASE 3

Das grundlegende Ziel der Theoriebildung ist es, verschiedene Hypothesen durch allgemeine Prinzipien miteinander in Beziehung zu setzen, und so eine Erklärung für die gemachten Beobachtungen zu erhalten. Diese zur Erklärung herangezogenen Prinzipien werden THEORETISCHE KONSTRUKTE genannt. In unserem Beispiel wird das unterschiedliche Verhalten von hölzernen und metallischen Gegenständen durch das gleiche allgemeine Prinzip, das wir SPEZIFISCHES GEWICHT nennen, erklärt. Das spezifische Gewicht ist die relative Dichte einer Substanz, d.h. das Verhältnis der Dichte einer Substanz und der einer Vergleichssubstanz (normalerweise Wasser).

Definition 2.3. *Theoretisches Konstrukt*

> Ein THEORETISCHES KONSTRUKT ist ein konstruierter, theoretischer oder theoriegebundener Begriff, der nur indirekte empirische Bezüge hat. Systeme von Konstrukten ergeben Theorien im Sinne begrifflicher Netze über einem Gegenstandsbereich. Linguistische Konstrukte sind *Struktur, System, Phonem, Kompetenz*, usw.

Mit dem Begriff bzw. theoretischen Konstrukt des spezifischen Gewichtes können nun die beiden Hypothesen

1. Alle Holzgegenstände schwimmen in Wasser
2. Alle festen Metallgegenstände gehen in Wasser unter

auf sehr allgemeine Weise miteinander in Beziehung gebracht werden:

> Alle festen Körper, deren spezifisches Gewicht kleiner ist als das einer bestimmten Flüssigkeit, schwimmen in dieser Flüssigkeit.

PHASE 4

Die Überprüfung von Theorien. Theorien werden überprüft, indem man sie zu falsifizieren versucht. Der Wissenschaftler versucht Fälle zu finden, die durch die Theorie nicht erklärt werden oder im Widerspruch zu den Vorhersagen der Theorie stehen. Eine Theorie ist gültig solange sie nicht falsifiziert worden ist. In unserem Beispiel kann die Hypothese, daß alle festen Metallgegenstände in Wasser untergehen, durch die Beobachtung falsifiziert werden, daß Natrium in Wasser schwimmt. Es handelt sich hier jedoch um eine Falsifizierung der ursprünglichen Hypothese "alle Metallgegenstände gehen unter", aber nicht der Theorie. Denn mit dem theoretischen Konstrukt des spezifischen Gewichts wird auch das Verhalten von Natrium erklärt, dessen spezifisches Gewicht (0.97) kleiner als das von Wasser (1.00) ist.

2.3. Wissenschaftssprache

Eine Theorie muß sprachlich ausgedrückt werden. Dies kann prinzipiell mithilfe der Alltagssprache geschehen. Damit sind jedoch eine Reihe von Schwierigkeiten verbunden, die dazu geführt haben, daß zur Formulierung von wissenschaftlichen Theorien eine eigene Wissenschaftssprache entwickelt worden ist.

2.3.1. ALLTAGSSPRACHE UND WISSENSCHAFTSSPRACHE

Definition 2.4. *Wissenschaftssprache*

> Die "Gesamtheit der sprachlichen Mittel einer Wissenschaft mit den Regeln für deren Gebrauch" (Klaus/Buhr 1971, sv. Wissenschaftssprache) nennt man WISSENSCHAFTSSPRACHE.

Die Grundlage einer Wissenschaftssprache ist immer die Alltagssprache. Gerade die Eigenschaften der Alltagssprache, die ihre Flexibilität als Kommunikationsmittel ausmachen, machen sie als Wissenschaftssprache jedoch ungeeignet: viele Wörter der Alltagssprache sind mehrdeutig, ihre Bedeutung ist oft unscharf; die Alltagssprache enthält Synonyme etc. Die Begriffe der Wissenschaftssprache müssen jedoch eindeutig und genau sein. Die Wissenschaftssprache versucht diese Nachteile der Alltagssprache zu überwinden, indem sie eine spezielle TERMINOLOGIE verwendet, die für die jeweilige Wissenschaft genau definierte Begriffe bezeichnet. Durch eine solche Terminologie wird neben der Eindeutigkeit auch eine kürzere und damit übersichtlichere Ausdrucksweise möglich.

2.3.2. THEORETISCHE UND METATHEORETISCHE BEGRIFFE

Definition 2.5. *Theoretische Begriffe*

> Begriffe, die sich auf den von einer Theorie beschriebenen Gegenstand beziehen, und die somit unmittelbare Bestandteil der Theorie sind, werden THEORETISCHE Begriffe genannt.

Theoretische Begriffe der Sprachtheorie sind z.B.: *Satz, Wort, Relativpronomen, Phonem* etc. Daneben sind auch Begriffe erforderlich, die Eigenschaften der Theorie selbst erfassen, mit denen man also über Theorien spricht.

Definition 2.6. *Metatheoretische Begriffe*

> Begriffe mit denen man über Eigenschaften von Theorien spricht werden METATHEORETISCHE Begriffe genannt.

Metatheoretische Begriffe der Sprachtheorie sind z.B.: *Transformationsregel, Strukturbeschreibung, Regelschema, Symbolkette, grammatische Kategorie* etc.

2.3.3. OBJEKTSPRACHE UND METASPRACHE

Die Wissenschaftssprache ist die Sprache, mit der eine Wissenschaft über ihre Gegenstände spricht. Betrachten wir zunächst die Verwendung der Wissenschaftssprache durch den Nicht-Linguisten.

Der Chemiker, z.B., verwendet Sprache um über Gegenstände zu sprechen, die keine Sprache sind. Die Sprache, die er dazu verwendet, unterscheidet sich jedoch von der Alltagssprache. Es ist eine besondere Sprache mit einem speziellen Vokabular, einer Terminologie. Es ist ein Teil der Sprache, die wir Wissenschaftssprache genannt haben. Nehmen wir folgendes Beispiel:

(2.1.) Natriumchlorid ist ein Salz

Natriumchlorid ist ein chemischer Terminus, den wir in der Alltagssprache nicht verwenden. In einem Spezialwörterbuch würden wir als Bedeutung 'Salz' finden. Was passiert jedoch, wenn wir im Beispiel *Natriumchlorid* durch *Salz* ersetzen?

(2.2.) Salz ist ein Salz.

Das ist etwas seltsam.[8]

Für den Chemiker hat das Wort *Salz* eine besondere und allgemeinere Bedeutung.

(2.3.) Salz ist eine Substanz, die durch die Reaktion einer Säure mit einer Base entsteht.

Noch genauer könnte diese Aussage wie folgt formuliert werden:

(2.4.) In der Chemie wird das Wort *Salz* zur Bezeichnung jeder Substanz verwendet, die durch die Reaktion einer Säure mit einer Base entsteht.

Damit sollte deutlich geworden sein, daß auch der Nicht-Linguist Sprache in zweierlei Funktionen verwendet. Er verwendet Sprache, um über Gegenstände zu sprechen, die selbst nicht Sprache sind. Die Sprache, die er zu diesem Zweck verwendet wird OBJEKTSPRACHE genannt.

Definition 2.7. *Objektsprache*

Der Teil der Wissenschaftssprache, mit der man über nicht-sprachliche Gegenstände einer Wissenschaft spricht, wird OBJEKTSPRACHE genannt.

Der Wissenschaftler verwendet Sprache jedoch auch, um über Sprache zu sprechen, z.B. über die Objektsprache seiner Wissenschaft. Das kann notwendig sein, um z.B. die Bedeutung eines bestimmten Terminus zu definieren, wie im obigen Beispiel.

Definition 2.8. *Metasprache*

Jede Sprache mit der über eine Sprache gesprochen wird, ist eine METASPRACHE

Da eine Metasprache selbst wieder eine Sprache ist, kann man sich auch eine Metasprache zu dieser Sprache vorstellen, eine Meta-Metasprache, so daß wir eine ganze Hierarchie mit mehreren metasprachlichen Ebenen erhalten:

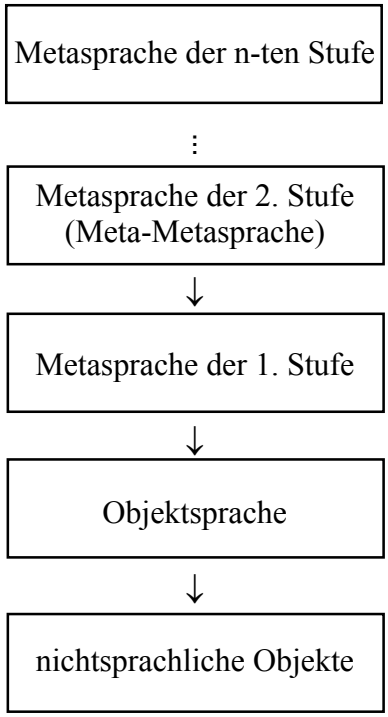


Abb. 2.1. Objektsprache und Metasprachen

[8] Normaler wäre allerdings *Kochsalz ist ein Salz.*

Eine Metasprache der ersten Stufe ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. Alles was in der Objektsprache ausgedrückt werden kann, kann auch in der zugeordneten Metasprache ausgedrückt werden. Eine Metasprache muß so ausdrucksfähig sein, daß sich alle Ausdrücke ihrer Objektsprache in sie übersetzen lassen.
2. Mittels der Metasprache kann man alle Ausdrücke der Objektsprache bezeichnen; das bedeutet: Man hat Namen für sie (NAMENMETASPRACHE).
3. Man kann in der Metasprache über alle Beschaffenheiten ihrer Objektsprache sprechen.
4. Man kann in der Metasprache Regeln für den Gebrauch der Objektsprache fomulieren. Z.B. kann man den Gebrauch objektsprachlicher Termini durch Definitionen semantisch regeln.

Für die Objektsprache gilt u.a. folgendes:

1. Ist die Objektsprache eine wissenschaftliche Fachsprache, ist zumindest der Gebrauch der Termini durch die zugehörige Metasprache semantisch geregelt.
2. Die Objektsprache ist nicht selbst-rückbezüglich, d.h. in der Objektsprache sind keine Aussagen über die Objektsprache selbst erlaubt.

Die Linguistik unterscheidet sich von anderen Wissenschaften u.a. darin, daß ihr Objekt die Alltagssprache ist. Genau betrachtet hat die Linguistik daher keine Objektsprache im definierten Sinn. Die Wissenschaftssprache der Linguistik ist daher immer schon eine Metasprache. Wenn wir sagen: *Peter hat zwei Silben,* wollen wir nicht über irgendeine Person sprechen, sondern über das Wort *Peter*. Es handelt sich also um einen metasprachlichen Ausdruck. Das Wort Silbe bezeichnet einen theoretischen Begriff und ist ebenfalls ein metasprachlicher Ausdruck.

Die Alltagssprache wird normalerweise verwendet um über nichtsprachliche Gegenstände zu sprechen und fungiert dann als Objektsprache. Sie kann jedoch auch reflexiv verwendet werden und fungiert dann als Metasprache. In der Alltagssprache kommen also sowohl objektsprachliche als auch metasprachliche Ausdrücke vor. Der Ausdruck *Dieses Wort möchte ich nicht noch einmal hören* ist sicher ein Ausdruck der Alltagssprache. Gleichzeitig ist das Wort *Wort* ein metasprachlicher Ausdruck. Um dieser besonderen Situation gerecht zu werden, soll der Begriff LINGUISTISCHEN OBJEKTSPRACHE eingeführt werden:

Definition 2.9. *Linguistische Objektsprache*

> In der Linguistik bezeichnet der Begriff OBJEKTSPRACHE eine natürliche Sprache wenn sie selbst Gegenstand der Untersuchung ist. Die linguistische Objektsprache ist reflexiv, d.h. sie kann metasprachliche Ausdrücke enthalten.

Angesichts der wichtigen Rolle, welche Sprache im menschlichen Leben spielt, ist es keineswegs überraschend, daß die Alltagssprache eine Reihe von Ausdrücken enthält, die sich auf sprachliche Gegenstände beziehen, z.B. *Satz, Wort, Laut, Buchstabe* usw. Man vergleiche die folgenden Beispiele:

(2.5.) (a) Hans ist ein Narr
(b) Hans ist ein Nomen
(c) Hans ist einsilbig

(2.6.) (a) Sätze bestehen aus Wörtern
(b) Sätze besteht aus 5 Buchstaben

(2.7.) Was Hans zu dem Mann im Garten gesagt hat ist zweideutig.

Der Satz *Hans ist ein Narr* ist ein normaler objektsprachlicher Ausdruck, mit dem eine Aussage über eine Person namens Hans gemacht wird. Der Satz *Hans ist ein Nomen* hingegen macht nur Sinn, wenn *Hans* sich nicht auf irgendein Individuum bezieht, sondern auf das Wort *Hans* selbst. Es handelt sich um eine metalinguistische Aussage über das deutsche Wort

Hans als Wort. Man kann auch sagen, daß im ersten Fall das Wort *Hans* 'gebraucht' wird während es im zweiten Fall 'erwähnt' wird.[9]

Wird ein Ausdruck erwähnt, fungiert er als NAME für sich selbst.

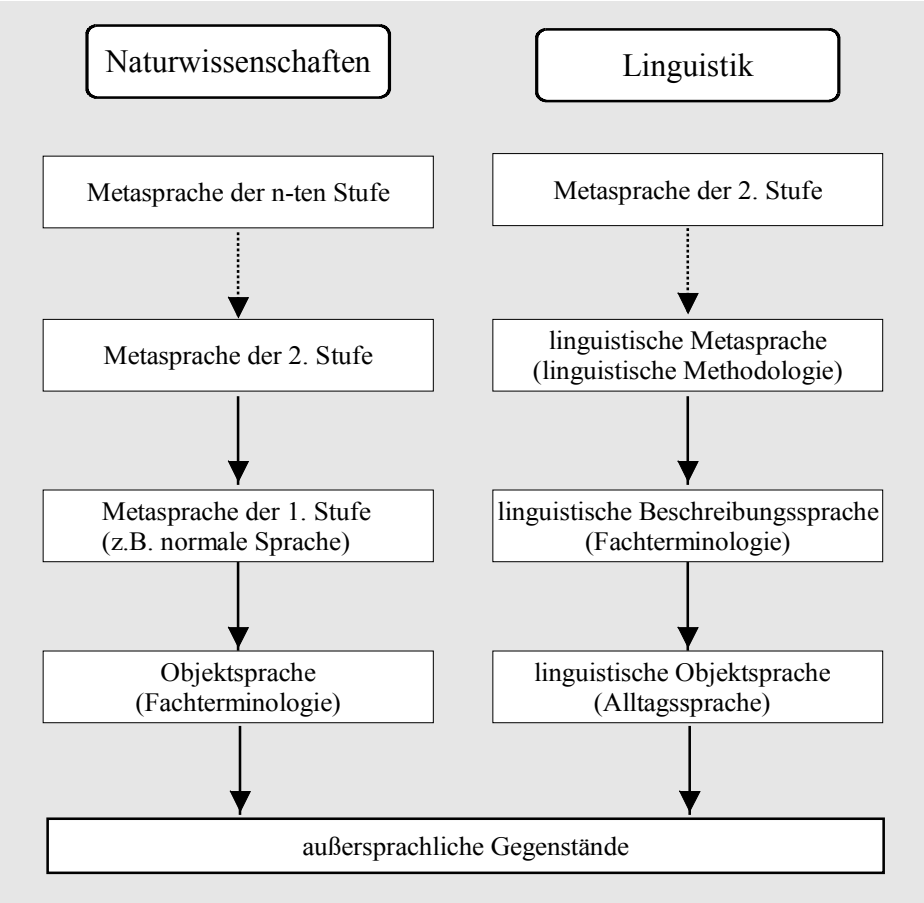


Abb. 2.2. Objekt- und Metasprache in Naturwissenschaft und Linguistik

Definition 2.10. *Name*

> Ein NAME ist ein metasprachlicher Ausdruck, der sich auf einen sprachlichen Ausdruck bezieht, z.B. um darüber eine linguistische Aussage zu machen.

Der unterschiedliche Status von *Hans* in den beiden Sätzen kann durch typographische Konventionen wie Anführungszeichen oder Kursivschrift verdeutlicht werden:

(2.8.) *Hans* ist ein Nomen. 'Hans' ist ein Nomen.

Erwähnung kann rekursiv sein.

(2.9.) Das Subjekt von *'Hans' ist ein Nomen* ist "Hans".

Vergleiche dazu auch folgendes Beispiel aus Carnap's Buch *The Logical Syntax of Language* (Carnap 1959: 156f.):

1. ist eine Ordnungszahl;
2. 'ω' ist keine Ordnungszahl, sondern ein griechicher Buchstabe;
3. Omega ist ein griechischer Buchstabe;
4. 'Omega' ist kein griechischer Buchstabe, sondern ein Wort, welches aus 5 Buchstaben besteht;

[9] Zur Unterscheidung von *Gebrauch* und *Erwähnung* vgl. auch Suppes (1957: 121ff.)

Im Satz (4) wird nicht über Omega gesprochen, also nicht über 'ω', sondern über 'Omega'. An Subjektstelle steht in (4) also nicht 'Omega' wie in Satz (3), sondern vielmehr "Omega".

Das Wort *Nomen* ist ebenfalls ein metalinguistischer Ausdruck. Es ist ein Fachterminus, der einen theoretischen Begriff bezeichnet.

Definition 2.11. *Linguistischer Terminus*

> Ein LINGUISTISCHER TERMINUS ist ein metasprachlicher Ausdruck, dem ein linguistischer Allgemeinbegriff durch Definition fest zugeordnet ist.

Der jeweilige begriffliche Inhalt linguistischer Termini muß möglichst genau festgelegt werden. Dies kann durch Definitionen geschehen, durch welche die einzelnen Begriffe voneinander abgegrenzt werden. Die einzelnen Begriffe erhalten so einen festen Stellenwert im Rahmen eines zusammenhängenden Begriffssystems.

Definition 2.12. *Definition*

> Unter einer DEFINITION versteht man die genaue Abgrenzung eines Begriffes innerhalb eines größeren Zusammenhanges unter Verwendung anderer Begriffe (EXPLIZITE Definition).

Definition 2.13. *Definiendum*

> Der zu definierende Begriff heißt DEFINIENDUM (lat. 'das zu Definierende').

Definition 2.14. *Definiens*

> Der Begriff oder Begriffskomplex, durch den ein Begriff (das DEFINIENDUM) definiert wird, heißt DEFINIENS (lat. 'das, was definiert').

Ein solches System besteht zunächst aus einer Reihe von GRUNDBEGRIFFEN, die nicht EXPLIZIT definiert werden können, sondern entweder durch ihre Stellung im Gesamtsystem IMPLIZIT definiert sind, oder im Rahmen einer anderen Theorie definiert werden. Alle anderen Begriffe werden aus den Grundbegriffen durch Definition abgeleitet.

Dabei können verschiedene Arten von Definitionen unterschieden werden.[10]

Definition 2.15. *Realdefinition*

> Durch eine REALDEFINITION wird eine bereits bekannter Begriff auf andere bekannte Ausdrücke in Übereinstimmung mit deren Bedeutungen zurückgeführt (*reduziert*).

Definition 2.16. *Nominaldefinition*

> Durch eine NOMINALDEFINITION wird ein neuer Begriff in die Wissenschaftssprache eingeführt und diese somit erweitert.

Ein typisches Beispiel für dieses Verfahren ist Bloomfields Artikel 'A Set of Postulates...' (1926, vgl. Kapitel 1). Dort wird beispielsweise SPRECHAKT als Grundbegriff vorausgesetzt und als ÄUSSERUNG bezeichnet:

Definition 2.17. *Äußerung*

> Ein Sprechakt ist eine ÄUSSERUNG.

---

[10] Vgl. dazu Esser (1970) sowie von Savigny (1970).

Ein weiterer Grundbegriff ist GLEICH, der zusammen mit dem Terminus ÄUSSERUNG zur Definition von SPRACHGEMEINSCHAFT herangezogen wird:

Definition 2.18. *Sprachgemeinschaft*

> Innerhalb bestimmter Gemeinschaften sind aufeinander folgende Äußerungen gleich oder teilweise gleich. Eine solche Gemeinschaft ist eine SPRACHGEMEINSCHAFT

Nachdem nun auf diese Weise ÄUSSERUNG und SPRACHGEMEINSCHAFT definiert ist, definiert Bloomfield SPRACHE wie folgt:

Definition 2.19. *Sprache*

> Die Gesamtheit der Äußerungen, die in einer Sprachgemeinschaft gemacht werden können, bildet die SPRACHE dieser Sprachgemeinschaft.

2.3.4. BESCHREIBUNGSSPRACHE

In 2.1.1 wurde Wissenschaftssprache definiert als die Gesamtheit der sprachlichen Mittel einer Wissenschaft. Unter diesen Mitteln ist eine Teilmenge besonders wichtig, nämlich die sprachlichen Mittel, mit denen die Theorien formuliert werden. Dieser Teil einer Wissenchaftssprache soll BESCHREIBUNGSSPRACHE genannt werden.

2.3.5. SYMBOLISIERTE UND FORMALISIERTE SPRACHEN

Wissenschaftliche Theorien sollen bestimmten Anforderungen genügen:

(a) Sie sollen widerspruchsfrei sein.

(b) Sie sollen adäquat sein, d.h. mit den Fakten übereinstimmen.

(c) Sie sollen explizit sein, d.h. sie sollen keine unausgesprochenen Annahmen machen.

(d) Sie sollen einfach sein.

Die Anforderungen (b)–(d) können nicht unmittelbar, sondern nur im Vergleich mit anderen Theorien überprüft werden. Ihre Überprüfung beruht also auf Aussagen wie "die Theorie T_1 ist einfacher (adäquater, expliziter) als T_2, weil ...". Der Begriff *widerspruchsfrei* bezieht sich nicht direkt auf die beschriebenen Sachverhalte, sondern auf den logischen Zusammenhang der Sätze der Theorie. Es hat sich gezeigt, daß es leichter ist, Theorien zu entwickeln, die diesen Anforderungen genügen, wenn man als Beschreibungssprache Kunstsprachen verwendet, die nach bestimmten Prinzipien konstruiert sind: SYMBOLISIERTE und FORMALISIERTE Sprachen.

Definition 2.20. *symbolisierte Sprache*

> Eine SYMBOLISIERTE SPRACHE ist eine Sprache, "deren Zeichen (=Symbole) künstlich geschaffen oder mit einer bestimmten neuen Bedeutung versehen wurden" (Klaus/Buhr 1971, *sv*. Sprache, symbolisierte).

Linguistische Symbole in diesem Sinne sind z.B. die Symbole für syntaktische und lexikalische Kategorien wie z.B. **S, NP, VP, AP, PP** für *Satz, Nominalphrase, Verbalphrase, Adjektivphrase, Präpositionalphrase* bzw. **N, V, A, P** für *Nomen, Verb, Adjektiv, Präposition*. Die moderne Linguistik bedient sich in vielen Bereichen einer symbolisierten Sprache. So kann z.B. die Aussage "ein Satz (S) besteht aus ($\rightarrow$) einer Nominalphrase (NP) verkettet mit ($\frown$) einer Verbalphrase (VP)" durch den Ausdruck $S \rightarrow NP \frown NP$ symbolisiert werden. Eine symbolisierte Sprache muß in eine natürliche Sprache übersetzbar sein, sonst ist sie sinnlos. Die Ausdrücke einer symbolisierten Sprache sind wesentlich übersichtlicher und kürzer als deren Übersetzung in die natürliche Sprache. Beispiel:

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [S(z) \leftarrow z=x^\frown y \wedge NP(x) \wedge VP(y)]$

Die Übersetzung dieses Ausdrucks lautet: Für beliebige (Ketten) *x, y, z* gilt: *z* ist ein Satz (*S(z)*), falls *z* gleich der Verkettung von *x* und *y* ist ($z=x^\frown y$) und *x* eine Nominalphrase (*NP(x)*) und *y* eine Verbalphrase (*VP(y)*) ist. Eine formalisierte Sprache ist meist eine symbolisierte Sprache im eben definierten Sinne. Sie weist darüber hinaus eine Reihe weiterer Eigenschaften auf. In einer formalisierten Sprache ist durch die SYNTAX genau festgelegt, welche Ausdrücke in ihr möglich sind (wohlgeformt sind). Sie enthält Operationsregeln, die es erlauben, aus wohlgeformten Ausdrücken neue wohlgeformte Ausdrücke abzuleiten. Darüber hinaus ist durch eine Semantik festgelegt, wie die wohlgeformten Ausdrücke zu interpretieren sind. Über formalisierte Sprachen verfügen insbesondere Teilgebiete der formalen Logik und der Mathematik. Die Beschreibungssprache der Linguistik ist primär eine symbolisierte Sprache. Es gibt jedoch auch in der Linguistik Ansätze zu einer formalisierten Sprache. Voraussetzung für den Aufbau einer formalisierten Sprache für ein bestimmtes Wissenschaftsgebiet ist, daß dessen logische Struktur genau bekannt ist und formuliert werden kann (vgl. KLAUS/BUHR 1971, *sv*. Sprache, formalisierte). Das trifft für die Linguistik jedoch nur in beschränktem Maße zu.

In seinem Buch *Syntactic Structures* definiert Chomsky SPRACHE wie folgt:

Definition 2.21. *Sprache*

> Von nun an will ich SPRACHE als eine (endliche oder unendliche) Menge von Sätzen auffassen, von welchen jeder von endlicher Länge und aus einer endlichen Menge von Elementen aufgebaut ist. (CHOMSKY 1957: 13, Übers. K.H.W).

Diese Definition ist ganz allgemein und schließt natürliche Sprachen nur als Sonderfall ein. Was für Objekte die Sätze einer Sprache tatsächlich sind hängt davon ab, aus welchen Grundelementen sie aufgebaut sind.

> Alle natürlichen Sprachen in ihrer gesprochenen und geschriebenen Form sind Sprachen in diesem Sinne, da jede natürliche Sprache eine endliche Zahl von Phonemen (oder Buchstaben des Alphabets) aufweist und jeder Satz als eine endliche Folge dieser Phoneme (oder Buchstaben) darstellbar ist, obwohl es unbegrenzt viele Sätze gibt. In ähnlicher Weise kann die Menge der 'Sätze' irgendeines formalisierten Systems der Mathematik als eine Sprache aufgefaßt werden. (CHOMSKY 1957: 13, Übers. K.H.W.)

Insbesondere im Zusammenhang mit formalen Sprachen wird statt des Ausdrucks 'grammatisch' zur Charakterisierung der Sätze einer Sprache der Ausdruck WOHLGEFORMT verwendet. 'Ungrammatische' Ausdrücke sind NICHT WOHLGEFORMT.

Gegeben sei beispielsweise folgende formale Sprache: L = {ab, aabb, aaabbb …} Die folgenden Ketten sind nicht wohlgeformt:

**ba, *aab, *abb, *aba, *ababbb.*

Die allgemeine Form eines Satzes in *L* ist also $a^n b^n$, d.h. eine Folge von *n* 'a' gefolgt von einer Folge von *n* 'b'. Unter der Annahme, daß es für *n* keine Obergrenze gibt, können die 'Sätze' in *L* nicht einfach durch Aufzählung definiert werden. Es ist also ein (endliches) Verfahren notwendig, das bestimmt welche der theoretisch möglichen Folgen von *a* und *b* in *L* enthalten sind. Die folgenden Regeln reichen dafür aus:

(a) *ab* ist in *L*

(b) Wenn *S* in *L* ist, dann ist auch *aSb* in *L*

(c) Nur nach (1) und (2) zulässige Ausdrücke sind in *L*.

Dabei steht das Symbol *S* für eine beliebige bereits als Satz von *L* identifizierte Folge von *a* und *b*.

Ableitungsbeispiel:	(1) ab	Regel 1
	(2) aabb	Regel 2, (1)
	(3) aaabbb	Regel 2, (2)
	(4) aaaabbbb	Regel 2, (3)

Im obigen Zitat aus Chomsky (1957) wird der Ausdruck *formalisiertes System* verwendet. Ein formalisiertes System (formales System) ist ein Symbolsystem, in dem dafür definierte Operationen mechanisch ausgeführt werden können, ohne daß man wissen muß, wofür die Symbole in Wirklichkeit stehen. Formalisierte Systeme werden durch Sprachen im oben definierten Sinne ausgedrückt. Ein anderer Ausdruck für eine formale Sprache ist KALKÜL.

Definition 2.22. *Kalkül*

Die Sprache eines formalisierten Systems wird KALKÜL genannt.

Definition 2.23. *uninterpretiertes Kalkül*

Ein Kalkül, dessen Formationsregeln oder syntaktische Regeln, festgelegt sind, für dessen Ausdrücke aber noch keine Interpretation geliefert worden ist, ist ein UNINTERPRETIERTES KALKÜL.

Definition 2.24. *interpretiertes Kalkül*

Ein Kalkül, für das sowohl syntaktische als auch semantische Regeln gegeben sind, ist ein INTERPRETIERTES KALKÜL.

Definition 2.25. *formalisierte Sprache*

Eine FORMALISIERTE SPRACHE ist ein interpretiertes Kalkül.

Es gibt formalisierte Systeme, die mehrere verschiedene konkrete Interpretationen haben. Ein Beispiel dafür ist etwa die BOOLESCHE ALGEBRA, die als Kalkülisierung sowohl der Mengentheorie als auch der Aussagenlogik verstanden werden kann.[11]

Im folgenden Kapitel werden wir uns ausführlich mit der Aussagenlogik im Sinne einer formalisierten Sprache, d.h. eines interpretierten Kalküls befassen.

Literatur

BLOOMFIELD, LEONARD

1926 A Set of Postulates for the Science of Language. In: *Language* **2**, 153–4.

CARNAP, RUDOLF

1959 *The Logical Syntax of Language.* Transl. by Amethe Smeaton, Littlefield, Adams & Co.: Paterson, N.J.

ESSER, WILHELM K.

1970 *Wissenschaftstheorie I. Definition und Reduktion*. Alber: Freiburg/München.

SUPPES, PATRICK

1957 *Introduction to Logic.* D. van Nostrand Company, Inc.: Princeton, N.J./ Toronto/ London/New York.

VON SAVIGNY, EIKE

1970 *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren*. Übungen zum Selbststudium. dtv: München.

[11] Weitere Interpretationen: Schaltalgebra, Theorie der Neuronennetze etc.

Kapitel 3.
Grundbegriffe der Aussagenlogik

3.1. Vorbemerkung

Die Aussagenlogik ist ein Zweig der formalen Logik, der die Beziehungen zwischen Aussagen und Aussagenverbindungen untersucht. Aussagen sind abstrakte Begriffe, auch PROPOSITIONEN genannt, die in der Alltagssprache durch Sätze ausgedrückt werden. Dabei kommt es in der Aussagenlogik nicht auf den konkreten Inhalt der Aussagen an, sondern nur auf die Entscheidung, ob eine Aussage WAHR oder FALSCH ist. Die Sätze

(3.1.) a. Der Mars ist ein Planet.
b. Der Mond ist ein Planet.

drücken zwei verschiedene Aussagen aus, wovon die erste wahr und die zweite falsch ist. Der Satz

(3.2.) Peter liebt Maria, aber sie verabscheut ihn.

drückt ebenfalls eine Aussage aus. Sie ist jedoch aus zwei einfacheren Aussagen zusammengesetzt, die durch die Sätze

(3.3.) a. Peter liebt Maria.
b. Maria verabscheut Peter.

wiedergegeben werden können. Man nennt solche komplexen Aussagen Aussagenverbindungen. Die Verknüpfung geschieht hier alltagsprachlich durch das Wort *aber* (in der Bedeutung 'und'). Dabei wird angenommen, daß die Wahrheit der Aussagenverbindung sich aus der Wahrheit der elementaren Aussagen “berechnen” läßt.[12]

In der formalen Logik werden Aussagen und Aussagenverbindungen durch eine formale Sprache ausgedrückt. Wie bei natürlichen Sprachen unterscheidet man auch bei formalen Sprachen zwischen der SYNTAX und der SEMANTIK von Ausdrücken. Die SYNTAX einer Sprache legt durch Regeln fest, wie die Ausdrücke der Sprache gebildet werden können. Die SEMANTIK legt die Bedeutung oder Funktion der Ausdrücke fest.

Die Sprache der Aussagenlogik ist sowohl hinsichtlich ihrer Syntax als auch ihrer Semantik eine sehr einfache Sprache. Sie bildet jedoch die Grundlage für die sehr viel ausdrucksfähigere und für die Linguistik bedeutsamere PRÄDIKATENLOGIK, die im nächsten Kapitel behandelt wird. Von daher ist es wichtig, die Grundlagen der Aussagenlogik zu kennen.

3.2. Syntaktische Regeln

Wir können die Aussagenlogik zunächst als ein Kalkül in dem in Kapitel 2. definierten Sinne auffassen. Ausgehend von einem Inventar von Grundelementen (dem VOKABULAR) ist durch Regeln genau festzulegen, welche der aus den Grundelementen bildbaren Zeichenketten zulässig oder ‘wohlgeformt’ sind und welche nicht.

Das Vokabular des Aussagenkalküls besteht aus folgenden Elementen:

1. Aussagenvariable: p, q, r, s, t …
2. Logische Konstante: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$[13]
3. Hilfssymbole: '(', ')', '[', ']', '{', '}'

---

[12] Genaueres zu den Begriffen Aussage und Wahrheit folgt weiter unten.

[13] Als weitere Bezeichnungen werden verwendet: 'Konnektoren', 'Junktoren', 'Operatoren'.

Die Regeln, die festlegen, welche Zeichenketten wohlgeformte Ausdrücke des Systems sind (FORMATIONSREGELN), müssen z.B. bestimmen, daß die Kette $(p \Rightarrow q)$ ein wohlgeformter Ausdruck ist, während die Kette $*(\wedge\ p)\ q\ \vee)$ kein wohlgeformter Ausdruck ist.

Definition 3.1. *Formel*

Ein wohlgeformter Ausdruck ist eine FORMEL.

Formationsregeln

Für die Bestimmung der Formeln des Aussagenkalküls sind die folgenden einfachen Formationsregeln ausreichend:

Regel 1: eine Aussagenvariable ist eine Formel.

Regel 2: ist P eine Formel, dann ist auch $\neg P$ eine Formel.

Regel 3: sind P und Q Formeln, dann sind
a. $(P \wedge Q)$
b. $(P \vee Q)$
c. $(P \Rightarrow Q)$
ebenfalls Formeln.

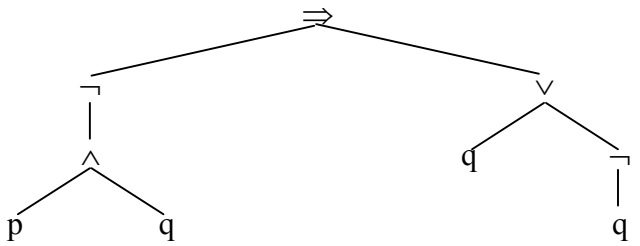
Regel 4: Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

Ableitungsbeispiel:

(1)	p	Regel 1
(2)	q	Regel 1
(3)	$\neg q$	Regel 2, (2)
(4)	$(p \wedge q)$	Regel 3a, (1), (2)
(5)	$\neg(p \wedge q)$	Regel 2, (4)
(6)	$(q \vee \neg q)$	Regel 3b, (2), (3)
(7)	$(\neg(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee \neg q))$	Regel 3c, (5), (6)

Die Klammern um die Ausdrücke sind wichtig, weil durch sie die Reihenfolge der semantischen Auswertung geregelt wird. (Mehr dazu weiter unten). Dies läßt sich verdeutlichen, wenn man die Ausdrücke durch Syntaxbäume darstellt.

(3.4.) Syntaxbaum für den Ausdruck $(\neg(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee \neg q))$



Ähnlich wie in der elementaren Arithmetik, wo Konventionen wie "Punktrechnung geht vor Strichrechnung" gelten, so daß z.B. ein Ausdruck wie $2 \cdot 3 + 4$ als $(2 \cdot 3) + 4$ zu lesen ist und somit $2 \cdot 3$ zuerst berechnet werden muß, hat man auch für die logischen Konstanten der Aussagenlogik verschiedene Auswertungsprioritäten festgelegt, welche die Reihenfolge der Auswertung regeln, wenn diese nicht durch Klammern explizit ausgedrückt ist. So ist z.B. der Ausdruck $a \wedge b \vee c$ als $(a \wedge b) \vee c$ zu lesen. Man sagt, der Operator $\wedge$ 'bindet' stärker als der Operator $\vee$.

Es gelten folgende Bindungsregeln:

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow$

Berücksicht man diese Bindungsregeln, kann man die Klammerausdrücke vereinfachen. Die äußerste Klammer kann in jedem Falle weggelassen werden, d.h. *(P)* vereinfacht sich zu *P*. Zeile (7) der obigen Ableitung vereinfacht sich dadurch zu $\neg(p \wedge q) \Rightarrow q \vee \neg q$.

3.3. Semantische Regeln

Das durch die Formationsregeln definierte formale System kann mit einer Semantik verbunden werden, durch die jeder Formel ein Wert zugewiesen wird, und zwar nach folgenden Regeln (*P* und *Q* sind jeweils Formeln):[14]

Regel 1: eine Variable kann die Werte 1 oder 0 annehmen.

Regel 2: $f(P \wedge Q) = \begin{cases} 1, \text{gdw } f(P) = 1 \text{ und } f(Q) = 1 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

Regel 3: $f(P \vee Q) = \begin{cases} 0, \text{gdw } f(P) = 0 \text{ und } f(Q) = 0 \\ 1, \text{sonst} \end{cases}$

Regel 4: $f(P \Rightarrow Q) = \begin{cases} 0, \text{gdw } f(P) = 1 \text{ und } f(Q) = 0 \\ 1, \text{sonst} \end{cases}$

Regel 5a: $f(\neg P) = 0$, gdw $f(P) = 1$

Regel 5b: $f(\neg P) = 1$, gdw $f(P) = 0$

Diese Regeln können als eine Charakterisierung der 'Bedeutung' der logischen Konstanten aufgefaßt werden, d.h. Regel 2 definiert die Bedeutung der Konstanten $\wedge$, Regel 3 die der Konstante $\vee$, etc.

Der Wert einer beliebigen Formel kann nun aus den Werten ihrer Konstituenten abgeleitet werden. Im folgenden Ausdruck soll gelten: p = 1 und q = 0:

	$\neg$	(p	$\wedge$	q)	$\Rightarrow$	(q	$\vee$	$\neg$	q)
	1	1	0	0	1	0	1	1	0
Schritte:	8	1	5	2	9	3	7	6	4

Auf diese Weise können die Werte des Ausdrucks für alle möglichen Kombinationen der Werte von p und q berechnet werden:

	$\neg$	(p	$\wedge$	q)	$\Rightarrow$	(q	$\vee$	$\neg$	q)
	0	1	1	1	1	1	1	0	1
	1	1	0	0	1	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	1	1	0	1
	1	0	0	0	1	0	1	1	0
Schritte:	8	1	5	2	9	3	7	6	4

[14] *gdw* ist eine Abkürzung für 'genau dann wenn'.

3.4. Interpretation

Das obige formale System kann auf unterschiedliche Weise interpretiert werden. Im folgenden handelt es sich um das Aussagenkalkül, wenn wir die Variable als Aussagen (Propositionen) auffassen. Der Begriff AUSSAGE ist nicht leicht zu definieren und Gegenstand kontroverser Auseinandersetzungen in der Philosophie. Es möge folgende Arbeitsdefinition gelten:

Definition 3.2. *Aussage*

> Eine AUSSAGE ist das, was durch einen Aussagesatz ausgedrückt wird, wenn wir damit eine Feststellung über einen Sachverhalt treffen.

Ein Ausdruck bezeichnet eine AUSSAGE nur dann, wenn er als WAHR oder FALSCH interpretiert werden kann. Der Satz *London ist die Hauptstadt von Uganda* z.B. drückt eine Aussage aus, die falsch ist. Zwei oder mehrere Aussagen können durch Ausdrücke, die bedeutungsmäßig etwa den Wörtern 'nicht', 'und', 'oder', 'wenn … dann' entsprechen zu komplexen Aussagen (Aussagenverbindungen) verknüpft werden. Diese Ausdrücke heißen LOGISCHE KONSTANTE, FUNKTOREN, JUNKTOREN oder OPERATOREN. Wir können beispielsweise die obige Aussage und die durch den Satz *London ist die Hauptstadt des Vereinigten Königreichs* zur Aussagenverbindung *London ist die Hauptstadt von Uganda oder London ist die Hauptstadt des Vereinigten Königreichs* verknüpfen.

Allgemein gilt, wenn p und q zwei Aussagen sind, dann ist die Verknüpfung $p \vee q$ ebenfalls eine Aussage, wobei das Zeichen $\vee$ die logische Konstante 'oder' symbolisiert.

In der Alltagssprache werden Aussagen durch Sätze ausgedrückt. Ein und dieselbe Aussage kann dabei durch verschiedene Sätze ausgedrückt werden. So geben z.B. die folgenden Sätze die gleiche Aussage wieder:

(3.5.) (a) Sterben ist menschlich
(b) Jeder Mensch muß sterben
(c) Der Mensch ist sterblich

In loser Redeweise nennt man Sätze Aussagen, wenn sie Aussagen ausdrücken.

Beispiele von Aussagen sind:

(3.6.) (a) München liegt am Rhein
(b) 3 ist eine Primzahl
(c) Die Schlange ist ein Vogel
(d) Die Luft ist leichter als Wasser

Keine Aussagen sind:

(3.7.) (a) Ein Objekt ist schwer
(b) Rot ist besser als gelb
(c) Scher dich zum Teufel

Das Aussagenkalkül ist eine mögliche konkrete Interpretation des obigen formalen Systems, wobei die Variablen Aussagen und die Formeln Aussagenverbindungen repräsentieren. Die Werte stehen für die Wahrheitswerte *wahr* = 1 und *falsch* = 0. Die obigen semantischen Regeln definieren die WAHRHEITSFUNKTIONALEN Eigenschaften der logischen Konstanten:

Negation: $\neg P$: Es ist nicht der Fall daß P, wobei $\neg P$ falsch ist wenn P wahr ist, und wahr, wenn P falsch ist.

Konjunktion: $P \wedge Q$: Sowohl P als auch Q, wobei $P \wedge Q$ wahr ist gdw sowohl P als auch Q wahr sind; andernfalls ist es falsch.

Disjunktion: $P \vee Q$: Entweder P oder Q, oder beides, wobei $P \vee Q$ falsch ist gdw sowohl P als auch Q falsch ist; andernfalls ist es wahr.

Implikation: $P \Rightarrow Q$: Wenn P dann Q, wobei $P \Rightarrow Q$ falsch ist gdw P wahr ist und Q falsch; andernfalls ist es wahr.

3.5. Aussagenverbindungen

AUSSAGENVERBINDUNGEN sind Verknüpfungen von Aussagen zu komplexen Aussagen. Verknüpfungen von Aussagen sind Aussagenverbindungen nur dann, wenn sie einen Wahrheitswert haben, d.h. entweder WAHR oder FALSCH sind. Demnach sind Aussagenverbindungen selbst Aussagen.

Die Verknüpfung erfolgt durch aussagenlogische FUNKTOREN, denen in der Alltagssprache die Wörter *und, oder, wenn ... dann* entsprechen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die alltagssprachlichen Wörter nicht eindeutig sind. So hat *oder* mindestens zwei Bedeutungen:

(a) entweder … oder, oder beides (inklusives *oder*)

(b) entweder … oder, aber nicht beides (exklusives *oder*)

Die sprachlichen Mittel einer Wissenschaftsprache müssen jedoch präzise sein. Sie müssen daher genau definiert werden. Dabei entspricht die aussagenlogische Bedeutung nicht immer der alltagssprachlichen. Das ist besonders deutlich bei der sogenannten IMPLIKATION (s.u.).

3.5.1. KONJUNKTION

Aussagenlogische Funktoren werden durch Wahrheitswerte definiert; es sind AUSSAGENFUNKTIONEN. Es wird dabei genau festgelegt, wie der Wahrheitswert einer bestimmten Aussagenverbindung von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen abhängt. Da es dabei auf den konkreten Inhalt der Aussagen nicht ankommen soll, ersetzt man die Aussagen durch AUSSAGENVARIABLE, die durch kleine Buchstaben (*p, q, r*…) bezeichnet werden.

Die logische KONJUNKTION zweier Aussagen entspricht ungefähr der Verwendung von *und.*[15]

Der Funktor wird durch das Zeichen $\wedge$ symbolisiert. Sind p und q zwei Aussagen, so ist auch $p \wedge q$ eine Aussage, und zwar mit folgenden Eigenschaften:

Definition 3.3. *Konjunktion*

Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist die Konjunktion $P \wedge Q$ eine WAHRE Aussage genau dann, wenn sowohl P als auch Q wahr ist. Andernfalls ist sie falsch. Dem entspricht folgende Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \wedge Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Diese Definition der Konjunktion leuchtet unmittelbar ein. Die Aussagenverbindung

(3.8.) München liegt an der Isar, und Bonn liegt an der Weser

ist wahr, wenn München wirklich an der Isar und Bonn wirklich an der Weser liegt. Da Bonn nicht an der Weser liegt, ist diese Aussagenverbindung falsch.

Da es auf den konkreten Inhalt von Aussagen nicht ankommen soll, sondern nur auf den Wahrheitswert, ist auch der folgende Satz aussagenlogisch gesehen, der Ausdruck einer sinnvolle Aussagenverbindung:

(3.9.) Die Katze ist ein Säugetier und 2 + 2 = 4

Es ist sogar eine *wahre* Aussagenverbindung, da die beiden Einzelaussagen ebenfalls wahr sind.

---

[15] Es gibt jedoch auch andere Bedeutungen von *und*, z.B. in *Er fiel die Treppe hinunter und brach sich das Bein*. Hier kann die Reihenfolge der Teilsätze nicht umgekehrt werden: **Er brach sich ein Bein und fiel die Treppe hinunter.*

3.5.2. DISJUNKTION

Die logische DISJUNKTION zweier Aussagen entspricht der Verwendung von *oder* in der Bedeutung 'entweder — oder, oder beides'. Der Funktor wird durch das Zeichen $\vee$ symbolisiert. Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist auch $P \vee Q$ eine Aussage, und zwar mit folgenden Eigenschaften:

Definition 3.4. *Diskunktion*

Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist die Disjunktion $P \vee Q$ eine FALSCHE Aussage genau dann, wenn sowohl P als auch Q falsch sind. Andernfalls ist sie wahr. Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \vee Q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

3.5.3. KONDITIONAL

Das KONDITIONAL (auch IMPLIKATION genannt) hat Ähnlichkeit mit der alltagssprachlichen Verwendung von *wenn ... dann,* sie ist jedoch nicht damit identisch. In der allgemeinen Verwendung bezeichnet die wenn dann-Beziehung auch einen Kausalzusammenhang oder eine notwendige Folge:

(3.10.) Wenn es regnet, wird die Straße naß (Kausalbezeichnung)

(3.11.) Wenn ein Dreieck gleichwinklig ist, ist es auch gleichseitig (notwendige Folge)

Das Konditional meint weder einen Kausalzusammenhang noch eine notwendige Folgerung. Der Funktor für das Konditionel wird durch das Zeichen $\Rightarrow$ symbolisiert.

Wenn P und Q zwei Aussagen sind, dann ist auch $P \Rightarrow Q$ (lies: *P impliziert Q*) eine Aussage, und zwar mit folgenden Eigenschaften:

Definition 3.5. *Konditional*

Sind P und Q zwei Aussagen, dann ist die Aussagenverbindung $P \Rightarrow Q$ eine *falsche* Aussage genau dann, wenn P wahr und Q falsch ist. Andernfalls ist sie wahr.

P	Q	$\mathrm{K} \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Diese Definition des Konditionals bereitet Verständnisschwierigkeiten, die z.T. daher rühren, daß die umgangssprachliche Verwendung des Konditionals vom Inhalt der Einzelaussagen abhängig ist. So behauptet die Definition, daß $P \Rightarrow Q$ auch dann wahr ist, wenn P falsch ist. Beispiel:

(3.12.) Wenn Peter Maria liebt, dann liebt Maria Peter

Man wird zugeben, daß diese Aussage wahr ist, wenn sowohl Peter Maria als auch Maria Peter liebt. Es leuchtet auch ein, daß die Aussage falsch ist, wenn zwar Peter Maria liebt, das umgekehrt aber nicht der Fall ist. Nach der Definition soll die Aussage aber wahr sein, wenn Peter Maria nicht liebt, gleichgültig, ob Maria Peter liebt oder nicht. Das will nicht mehr so recht einleuchten.

Daß diese Definition des Konditionals dennoch sinnvoll ist, zeigt sich im Gesamtsystem der Aussagenlogik. Sie ist für die Schlußregeln notwendig und führt zu keinen Widersprüchen.

3.5.4. NEGATION

Die logische NEGATION ist keine Aussagenverbindung im eigentlichen Sinn. Ist p eine Aussage, so ist die Negation von p die Aussage "es ist nicht der Fall, daß p". Der Ausdruck "es ist nicht der Fall, daß" wird durch das Zeichen $\neg$ symbolisiert.

Ist P eine Aussage, so ist auch $\neg P$ eine Aussage, und zwar mit folgenden Eigenschaften:

Definition 3.6. *Negation*

> Ist P eine Aussage, dann ist die Negation $\neg P$ wahr, wenn P falsch ist, und falsch, wenn P wahr ist.

Wahrheitstafel:

P	$\neg P$
w	f
f	w

Diese Definition leuchtet unmittelbar ein.

3.5.5. KOMPLEXE AUSSAGENVERBINDUNGEN

Natürlich gibt es auch Aussagenverbindungen, die aus mehr als zwei Aussagen bestehen. Man kann sie sich aus Aussagen und einfachen Aussagenverbindungen zusammengesetzt denken. Wir haben z.B. formuliert: wenn p und q Aussagen sind, dann ist auch $p \Rightarrow q$ eine AUSSAGE. Eine Aussagenverbindung ist eine Aussage. Man hat damit gleich eine Bildungsregel für komplexe Aussagenverbindung. $p \Rightarrow q$ bleibt eine Aussage, auch wenn man p oder q durch beliebige Aussagenverbindungen ersetzt. Um den Bezug der Funktoren eindeutig zu machen, müssen die substituierten Aussagenverbindung eingeklammert werden. Ersetzt man z.B. q durch $q \vee r$, erhält man die komplexe Aussagenverbindung $p \Rightarrow (q \vee r)$. Es gibt jedoch bestimmte Konventionen für die Bindekraft der Funktoren (s.o.) $\neg$ —- $\wedge$ — $\vee$ — $\Rightarrow$, $\neg$ bindet am stärksten, $\Rightarrow$ am schwächsten. Unter dieser Voraussetzung kann der Ausdruck auch als $p \Rightarrow q \vee r$ geschrieben werden.

Für komplexe Aussagenverbindungen gelten somit die gleichen Wahrheitsbedingungen wie für einfache Aussagenverbindungen.

Die Aussage $p \Rightarrow (q \vee r)$ ist nach der Definition der Implikation nur dann falsch, wenn p wahr ist und $q \vee r$ falsch. Die Aussage $q \vee r$ wiederum ist dann falsch, wenn sowohl q als auch r falsch ist. Folglich ist $p \Rightarrow (q \vee r)$ genau dann falsch, wenn p wahr ist und q und r falsch.

Durch schrittweise Anwendung der Wahrheitsfunktionen für die einzelnen Funktoren (z.B. mithilfe der Wahrheitstabellen) lassen sich die Wahrheitswerte von komplexen Aussagenverbindungen berechnen.

	p	$\Rightarrow$	q	$\vee$	r
	w	w	w	w	w
	w	w	w	w	f
	w	w	f	w	w
	w	f	f	f	f
	f	w	w	w	w
	f	w	w	w	f
	f	w	f	w	w
	f	w	f	f	f
Schritte	1	5	2	4	3

3.5.6. TAUTOLOGIE UND KONTRADIKTION

Eine wesentliche Aufgabe der Aussagenlogik ist die Untersuchung der Wahrheitswerte von komplexen Aussagenverbindungen. Dabei interessieren vor allem zwei Fälle:

1. Aussagenverbindungen, die immer *wahr* sind, gleichgültig, welchen Wahrheitswert die Einzelaussagen haben; diese Aussagenverbindungen werden TAUTOLOGISCH genannt.
2. Aussagenverbindungen, die immer *falsch* sind; sie werden KONTRADIKTORISCH genannt.

Definition 3.7. *Tautologie*

Eine Aussagenverbindung ist eine TAUTOLOGIE, wenn sie unter allen Interpretationen wahr ist.

Definition 3.8. *Kontradiktion*

Eine Aussagenverbindung ist eine KONTRADIKTION, wenn sie unter allen Interpretationen falsch ist.

Definition 3.9. *erfüllbar*

Aussagenverbindungen, die weder tautologisch noch kontradiktorisch sind, heißen ERFÜLLBAR oder KONTINGENT.

Eine einfache Tautologie ist z.B.

(3.13.) a. Es ist nicht der Fall, daß Hans dumm ist und nicht dumm ist.
b. $\neg(p \wedge \neg p)$

Dagegen ist der folgende Satz eine Kontradiktion:

(3.14.) a. Hans ist ehrlich und unehrlich.
b. $p \wedge \neg p$

Das ist leicht einzusehen. Eine Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Konjunktionsglieder wahr sind. Ist p wahr, dann ist $\neg p$ falsch; ist p falsch, dann ist $\neg p$ wahr. Folglich ist $p \wedge \neg p$ immer falsch und $\neg(p \wedge \neg p)$ immer wahr. Dies wird auch in der expliziten Berechnung mit Wahrheitsfunktionen deutlich:

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
w	*w*	*f*	*f*	*w*
w	*f*	*f*	*w*	*f*

Die Kontradiktion der Form $p \wedge \neg p$ spielt in der Beweisführung der Mathematik eine große Rolle. Das Verfahren besteht darin, daß man das Gegenteil der zu beweisenden Aussage annimmt und zeigt, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt (*reduction ad absurdum*). Nach dem gleichen Verfahren läßt sich auch beweisen, ob eine Aussagenverbindung eine Tautologie bzw. eine Kontradiktion ist.

Es soll z.B. gezeigt werden, daß die folgende Aussagenverbindung eine Tautologie ist:

(3.15.) $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
(Wenn gilt 'p impliziert q' und 'q impliziert r', dann gilt auch p impliziert r.)

Man kann den Beweis dadurch antreten, daß man sämtliche Wahrheitswertkombinationen durchrechnet (das wären immerhin acht Fälle). Das entspricht dem wissenschaftlichen Verfahren der VERIFIKATION. Man kann die Behauptung aber auch zu falsifizieren versuchen.

Eine Aussagenverbindung ist tautologisch, wenn sie immer wahr ist. Wir nehmen nun an, daß $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ keine Tautologie ist, d.h. daß sie in mindestens einem Fall falsch ist. Nach der Definition der Implikation müßte dann $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r)$ wahr und $(p \Rightarrow r)$ falsch sein.

(3.16.)	*(p*	⇒ *q*	∧	*q*	⇒	*r)*	⇒	*(p*	⇒ *r)*
			w				*f*		*f*

Nach der Definition der Konjunktion müssen daher $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow r$ beide wahr sein. Außerdem kann $p \Rightarrow r$ nur dann falsch sein, wenn p wahr und r falsch ist.

(3.17.)	*(p*	⇒ *q*	∧	*q*	⇒	*r)*	⇒	*(p*	⇒ *r)*
		w	*w*		*w*		*f*	*w*	*f* *f*

Wenn r falsch ist, kann $q \Rightarrow r$ nur wahr sein, wenn auch q falsch ist. Wenn q falsch ist, kann $p \Rightarrow q$ nur wahr sein. wenn auch p falsch ist.

(3.18.)	*(p*	⇒ *q*	∧	*q*	⇒	*r)*	⇒	*(p*	⇒ *r)*
	F	*w* *f*	*w*	*f*	*w*	*f*	*f*	*W*	*f* *f*

Die Annahme , daß $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ keine Tautologie ist, hat die Folge, daß p gleichzeitig wahr und falsch sein müßte. Das ist ein Widerspruch. Folglich ist unsere Annahme falsch und $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ist eine Tautologie.

Eine der Hauptaufgaben der formalen Logik ist es zu untersuchen, unter welchen formalen Bedingungen LOGISCHE SCHLÜSSE gültig sind.

Ein Schluß besteht aus einer Menge von PRÄMISSEN, die als wahr angenommen werden und einer KONKLUSION, die daraus logisch (d.h. unabhängig von der Bedeutung der Prämissen) folgen soll. Ein Schluß ist gültig, wenn es eine entsprechende AUSSAGENFUNKTION (Assagenverbindung) gibt, die eine Tautologie ist. Betrachten wir folgendes Beispiel:

Prämissen:

1. Entweder zahlt die Regierung Lösegeld, oder die Terroristen werden ihre Opfer töten
2. Die Regierung wird jedoch kein Lösegeld zahlen

Konklusion: Folglich werden die Terroristen ihre Opfer töten.

Die Frage ist nun, ob dieser Schluß gültig ist, d.h. ob die Konklusion tatsächlich logisch aus den Prämissen folgt.

Setzen wir p = *Die Regierung zahlt Lösegeld* und q = *Die Terroristen werden ihre Opfer töten*, dann hat die erste Prämisse die Form $p \vee q$, die zweite die Form $\neg p$. Die Konklusion soll aus der Konjunktion der Prämissen folgen, d.h. aus $(p \vee q) \wedge \neg p$. Der gesamte Schluß wird also durch die folgende Aussagenverbindung dargestellt:

(3.19.) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Mithilfe der Wahrheitsfunktionen der Funktoren läßt sich die Gültigkeit dieser Formel berechnen:

	(p	∨	*q)*	∧	¬	*p*	⇒	*q*
	w	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*	***w***	*w*
	w	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	***w***	*f*
	f	*w*	*w*	*w*	*w*	*f*	***w***	*w*
	f	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*	***w***	*f*
Schritte	1	5	2	7	6	3	**8**	4

Wie die Spalte 8 zeigt ist die Aussagenfunktion unter jeder Interpretation ihrer Variablen wahr und daher eine Tautologie.

Was geschieht nun aber, wenn wir die zweite Prämisse und die Konklusion jeweils durch ihre Negation ersetzen, d.h. durch *Die Regierung wird Lösegeld zahlen* bzw. *Die Terroristen werden ihre Opfer nicht töten*?

	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	p	$\Rightarrow$	$\neg$	q
	w	w	w	w	w	$\boldsymbol{f}$	f	w
	w	w	f	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	f
	f	w	w	f	f	$\boldsymbol{w}$	f	w
	f	f	f	f	f	$\boldsymbol{w}$	w	f
Schritte	1	5	2	6	3	8	7	4

Wie die Spalte 8 zeigt, ist dies kein gültiger Schluß.

3.5.7. LOGISCHE ÄQUIVALENZ

Verschiedene aussagenlogische Ausdrücke (Formeln) können hinsichtlich ihres wahrheitsfunktionalen Verhaltens miteinander verglichen werden. Dabei interessieren insbesondere solche Ausdrücke, die unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind. Solche Ausdrücke heißen LOGISCH ÄQUIVALENT.

Definition 3.10. *logisch äquivalent*

> Zwei aussagenlogische Formeln P und Q heißen LOGISCH ÄQUIVALENT (symbolisch: $P \equiv Q$) genau dann, wenn sie unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind, d.h. wenn sie für jede konsistente Bewertung ihrer Elementaraussagen stets den gleichen Wahrheitswert haben.

Mit anderen Worten: äquivalente Formeln haben die gleichen Wahrheitstafeln. Die Äquivalenz setzt normalerweise voraus, daß die Formeln aus den gleichen elementaren Aussagen zusammengesetzt sind. Mit konsistenter Bewertung ist gemeint, daß in beiden Formeln einer Elementaraussage nicht verschiedene Wahrheitswerte zugewiesen werden dürfen.

Beispielsweise sind die Ausdrücke $\neg(p \vee q)$ und $\neg p \wedge \neg q$ logisch äquivalent, d.h. es gilt $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Der Nachweis erfolgt durch Berechnung der Wahrheitstafeln.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Daraus ist ersichtlich, daß $\neg(p \vee q)$ und $\neg p \wedge \neg q$ in der Tat die gleichen Wahrheitstafeln besitzen. Durch diese Äquivalenz wird ein systematischer Zusammenhang zwischen Negation, Konjunktion und Disjunktion hergestellt, wenn man noch berücksichtigt, daß P und $\neg\neg P$ $(= \neg(\neg P))$äquivalente Ausdrücke sind.

Die Äquivalenz von Ausdrücken ist ein ganz entscheidendes Mittel, um systematische formale Zusammenhänge zwischen logischen Ausdrücken darzustellen. Da äquivalente Ausdrücke die gleichen Wahrheitstafeln haben, können Teilausdrücke einer komplexen Formel durch beliebige äquivalente Ausdrücke ersetzt werden, ohne daß sich der Wahrheitswert des Gesamtausdrucks ändert. Auf diese Weise können dann Äquivalenzen zwischen Ausdrücken durch rein formale, syntaktische Operationen aufgezeigt werden.

Mit den Äquivalenzen

1. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
2. $P \equiv \neg\neg P$

läßt sich die Konjunktion durch die Disjunktion und umgekehrt die Disjunktion durch die Konjunktion ersetzen.

1. $\neg(p \wedge q)$
2. $\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$ mit $\{p/\neg\neg p, q/\neg\neg q\}$
3. $\neg(\neg(\neg p \vee \neg q))$ mit $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$, wenn $P = \neg p$ und $Q = \neg q$
4. $\neg p \vee \neg q$, wegen $P \equiv \neg\neg P$, wenn $P = \neg p \vee \neg q$

Damit ist auch gezeigt, daß $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$, und zwar auf rein syntaktischem Weg, ohne die Wahrheitswerte einzeln zu prüfen.

Die beiden Äquivalenzen

(3.20.) (a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ und
(b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

die mithilfe der Negation einen systematischen Zusammenhang zwischen der Konjunktion und der Disjunktion herstellen, sind als die *Gesetze von De Morgan* bekannt.

Äquivalenzen zwischen Ausdrücken lassen sich auch per Definition einführen, wobei jedoch gleichzeitig zusätzliche syntaktische Mittel eingeführt werden. Man betrachte beispielsweise den Fall der wechselseitigen Implikation *Wenn p dann q, und wenn q dann p*: $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$. Diese Formel hat folgende Wahrheitswerte:

p	$\Rightarrow$	q	$\wedge$	q	$\Rightarrow$	p
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f
f	w	f	w	f	w	f

Sie hat eine besondere Eigenschaft insofern sie genau dann wahr ist, wenn die elementaren Teilaussagen jeweils den gleichen Wahrheitswert aufweisen. Es ist daher sinnvoll, sie als eigenständige Wahrheitsfunktion zu betrachten und durch einen eigenen Funktor $\Leftrightarrow$ zu bezeichnen. Die Funktion $P \Leftrightarrow Q$ wird BIKONDITIONAL aber auch ÄQUIVALENZ genannt.[16]

Definition 3.11. *Bikonditional (Äquivalenz)*

Das BIKONDITIONAL (die ÄQUIVALENZ) ist definiert durch:

$$P \Leftrightarrow Q :\Leftrightarrow P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$$

Sind P und Q logische Formeln, so ist das BIKONDITIONAL $P \Leftrightarrow Q$ eine WAHRE Aussage, wenn P und Q den gleichen Wahrheitswert haben, andernfalls ist es eine FALSCHE Aussage. Dem entspricht folgende Wahrheitstabelle:

[16] Die Formeln $P \equiv Q$ und $P \Leftrightarrow Q$ hängen zwar miteinander zusammen, sind jedoch verschieden zu interpretieren. $P \equiv Q$ behauptet, daß P und Q unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind, d.h. daß $f(P)=f(Q)$, wenn f eine Bewertungsfunktion ist. Für dir Formel $P \Leftrightarrow Q$ hingegen gilt, daß sie genau dann wahr ist, wenn P und Q den gleichen Wahrheitswert haben, d.h. $f(P \Leftrightarrow Q) = \begin{cases} \text{w gdw } f(P) = f(Q) \\ \text{f, sonst} \end{cases}$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Deutsche Ausdrücke, die dem Bikonditional entsprechen, sind *dann und nur dann wenn, genau dann wenn, gerade dann wenn* und *ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für.*

Durch derart definitorisch eingeführte Äquivalenzen werden keine neuen Erkenntnisse gewonnen, aber die Ausdrucksfähigkeit der Sprache erweitert.

In ähnlicher Weise ließe sich das Konditional per Definition einführen, wobei gilt $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß eine Voraussetzung für die Äquivalenz von Ausdrücken ist, daß sie aus den gleichen Elementaraussagen aufgebaut sind. Beispielsweise können $p \wedge q$ und $p \wedge r$ nicht logisch äquivalent sein. Hingegen sind die Ausdrücke $p \wedge (q \vee \neg q)$ und $p \wedge (r \vee \neg r)$ jedoch logisch äquivalent, wie eine Berechnung der Wahrheitswerte zeigen würde, obwohl sie aus verschiedenen Elementaraussagen gebildet sind. Dies hängt damit zusammen, daß $q \vee \neg q$ und $r \vee \neg r$ beides Tautologien sind und somit unabhängig von den Wahrheitswerten von q und r stets genau den gleichen Beitrag für die Berechnung der Wahrheitswerte des Gesamtausdrucks leisten. Wir können allgemein sagen, daß zwei beliebige Tautologien oder zwei beliebige Kontradiktionen logisch äquivalent sind, selbst wenn sie nicht dieselben Elementaraussagen enthalten, da ihre Wahrheitswerte ja unabhängig von diesen Elementaraussagen sind.

Wie bereits ausgeführt sind logisch äquivalente Ausdrücke in der Logik von großer Bedeutung, da sie in jedem Ausdruck beliebig füreinander ersetzt werden können, ohne dessen Wahrheitsgehalt zu ändern. Dadurch wird es möglich, aus Ausdrücken auf rein syntaktischem Wege neue äquivalente Ausdrücke zu bilden.

In der logischen Praxis hat es sich als nützlich erwiesen, ein Grundinventar von logischen Äquivalenzen quasi als Grundgesetze zur Verfügung zu haben, aus denen alle anderen abgeleitet werden können (vgl. Tabelle Abb. 3.3.). Diese Tabelle enthält gewisse Redundanzen, insofern gewisse Äquivalenzen aus anderen abgeleitet werden können.

Idempotenz und Komplementarität

Die Gesetze für die IDEMPOTENZ und KOMPLEMENTARITÄT ergeben sich aus den folgenden Wahrheitstafeln:

P	$P \wedge P$	$P \vee P$	$\neg P$	$\neg\neg P$	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
w	w	w	f	w	w	f
f	f	f	w	f	w	f

P, $P \wedge P$, $P \vee P$, und $\neg\neg P$ haben in der Tat die gleichen Wahrheitstafeln und sind somit äquivalent. $P \vee \neg P$ ist eine Tautologie, was durch $P \vee \neg P \equiv W$ ausgedrückt wird, hingegen ist $P \wedge \neg P$ eine Kontradiktion: $P \wedge \neg P \equiv F$.

Die Konjunktion und Disjunktion sind jeweils ASSOZIATIVE Verknpüfungen, d.h. es kommt nicht auf die Reihenfolge der Auswertung an. Da $(p \wedge q) \wedge r$ und $p \wedge (q \wedge r)$ äquivalent sind, können die Klammern auch weggelassen werden: $p \wedge q \wedge r$.

1) Gesetze der Idempotenz
   a) $P \vee P \equiv P$
   b) $P \wedge P \equiv P$
2) Gesetze der Assoziativität
   a) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
   b) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
3) Gesetze der Kommutativität
   a) $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   b) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
4) Gesetze der Distributivität
   a) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   b) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
5) Gesetze der Identität
   a) $P \vee F \equiv P$
   b) $P \vee W \equiv W$
   c) $P \wedge F \equiv F$
   d) $P \wedge W \equiv P$
6) Gesetze der Komplementarität
   a) $P \vee \neg P \equiv W$
   b) $\neg\neg P \equiv P$ Gesetz der Negation
   c) $P \wedge \neg P \equiv F$
7) Gesetze von De Morgan
   a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
   b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
8) Gesetze für das Konditional
   a) $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
   b) $P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$
   c) $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ Gesetz der Kontraposition
9) Gesetze für das Bikonditional
   a) $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
   b) $P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

Abb. 3.3.

Kommutativität

Die Gesetze der KOMMUTATIVITÄT ergeben sich eigentlich aus der Definition von Konjunktion und Disjunktion:

$$f(P \wedge Q)= \begin{cases} w, \text{gdw } f(P) = w \text{ und } f(Q) = w \\ f, \text{sonst} \end{cases}$$

gleichgültig ob man $\{P/p, Q/q\}$ oder $\{P/q, Q/p\}$ substituiert.

Distributivgesetz

Das DISTRIBUTIVGESETZ 4.a. wird durch die folgenden Wahrheitstafeln verifiziert.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
w	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*w*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*
f	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
f	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*	*f*
f	*f*	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*

Gesetze der Identität

Die Gesetze der IDENTITÄT ergeben sich wiederum aus der Definition von Konjunktion und Disjunktion.

$$f(P\wedge Q)= \begin{cases} w, \text{gdw } f(P) = w \text{ und } f(Q) = w \\ f, \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f(P\vee Q)=\begin{cases} f, \text{dw } f(P) = f \text{ und } f(Q) = f \\ w, \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Konjunktion gilt somit: ist Q eine Kontradiktion (F), so ist die Konjunktion immer falsch, gleichgültig welchen Wert P hat. Ist Q hingeben eine Tautologie (W), so ist der Wahrheitswert der Konjunktion ausschließlich von P abhängig.

Für die Disjunktion gilt: ist Q eine Tautologie (W), so ist die Disjunktion immer wahr, gleichgültig welchen Wert P hat. Ist Q hingegen eine Kontradiktion (F), so ist der Wahrheitswert der Disjunktion ausschließlich von P abhängig.

Gesetze für das Konditional

Das Gesetz 8.a. ist bereits auf S. 28 durch Wahrheitstafeln verifiziert worden. Die übrigen Gesetze lassen sich durch Umformung ableiten, z.B.:

Zeile	Formel	aus Zeile(n)	durch Gesetz
(1)	$P \Rightarrow Q$		
(2)	$\neg P \vee Q$	(1)	8.a.
(3)	$\neg P \vee \neg\neg Q$	(2)	6.b. Negation
(4)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	(3)	7.b. De Morgan
Folglich:	$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$		

Zeile	Formel	aus Zeile(n)	durch Gesetz
(1)	$P \Rightarrow Q$		
(2)	$\neg P \vee Q$	(1)	8.a.
(3)	$Q \vee \neg P$	(2)	3.a. Kommutativität
(4)	$\neg\neg Q \vee \neg P)$	(3)	6.b. Negation
(5)	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	(4)	8.a.
Folglich:	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$		

Gesetze für das Bikonditional

Gesetz 9.a. gilt per Definition. Der Beweis von Gesetz 9.b. könnte wie folgt aussehen.

Zeile	Formel	aus	durch Gesetz
(1)	$P \Leftrightarrow Q$		
(2)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	(1)	9.a.
(3)	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$	(2)	8.a.
(4)	$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P)$	(3)	4.b. Distributivität
(5)	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge P) \vee (P \wedge Q))$	(4)	4.b. Distributivität
(6)	$((\neg P \wedge \neg Q) \vee F) \vee (F \vee (P \wedge Q))$	(5)	6.c. Komplementarität
(7)	$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	(6)	5.a. Identität

Wir wollen nun noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Äquivalenz und Bikonditional zu sprechen kommen. Wir haben gesagt, daß zwei Aussagen P und Q dann äquivalent sind, wenn sie unter den gleichen Bedingungen wahr oder falsch sind. Das bedeutet aber, daß sie immer nur gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch sein können: f(P)=f(Q). Aus der Definition des Bikonditionals

$$f(P \Leftrightarrow Q) = \begin{cases} w, \text{ gdw } f(P) = f(Q) \\ f, \text{ sonst} \end{cases}$$

ergibt sich jedoch, daß es genau in diesen Fällen den Wert wahr erhält. Wir kommen damit zu folgendem Theorem:

Theorem 3.1

Für beliebige Aussagen P und Q gilt: P und Q sind logisch äquivalent ($P \equiv Q$) genau dann, wenn $P \Leftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

Zur Illustration soll dies für die Äquivalenz $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ demonstriert werden:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Da die Wahrheit einer Tautologie unabhängig von der Wahrheit ihrer Elementaraussagen ist und ausschließlich von der formalen Struktur abhängt, kann man diese Elementaraussagen durch beliebige andere Aussagen ersetzen, ohne daß sich am Status der Tautologie etwas ändert, vorausgesetzt daß die Ersetzung konsistent erfolgt. Ist $P \Leftrightarrow Q$ eine Tautologie, so ist auch $P' \Leftrightarrow Q'$ eine Tautologie, wenn P' und Q' durch konsistente Substitution aus P bzw. Q hervorgehen. Wenn man in unserem Beispiel: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ beispielsweise p durch $r \vee s$ und q durch $\neg s$ ersetzt, erhält man die Tautologie $((r \vee s) \Rightarrow \neg s) \Leftrightarrow (\neg(r \vee s) \vee \neg s)$ und somit die logische Äquivalenz $((r \vee s) \Rightarrow \neg s) \equiv (\neg(r \vee s) \vee \neg s)$.

3.6. Logisches Schließen

Die eigentliche Aufgabe der formalen Logik ist es, die Gesetze des logischen Schließens zu untersuchen. Dabei geht es wiederum wesentlich darum zu zeigen, inwieweit die Gültigkeit eines Schlusses sich allein aus seiner Form ergibt.

Definition 3.12. *Schluß*

> Ein SCHLUSS beteht aus einer Menge von Aussagen $\{P_1,\ldots,P_n\}$, den PRÄMISSEN, die als wahr vorausgesetzt werden, und einer weiteren Aussage K, der KONKLUSION, deren Wahrheit notwendig aus der Wahrheit der Prämissen folgen soll.

Beispiel:

Prämissen: Wenn Sokrates ein Mensch ist,
so ist er sterblich.
Sokrates ist ein Mensch

Konklusion: $\therefore$ Sokrates ist sterblich.

Das Zeichen $\therefore$ steht für *also* und kennzeichnet die Konklusion.

Definition 3.13. *Schlußschema*

> Ein SCHLUSSSCHEMA ist eine Schlußform, in der anstelle von Aussagen Aussagenvariable stehen.

Ein Schluß ist dann eine INSTANZ (ein "Einsetzungsbeispiel") eines Schlußschemas, wenn alle Variablen konsistent durch Aussagen ersetzt werden. Unser Beispiel ist eine Instanz des folgenden Schlußschemas, mit den Substitutionen {p/Sokrates ist ein Mensch, q/Sokrates ist sterblich}

(3.21.) $p \Rightarrow q$
p
$\overline{}$
$\therefore q$

3.6.1. LOGISCHE IMPLIKATION

Ein Schluß ist dann gültig, wenn die Konklusion aus den Prämissen *logisch* folgt. Man nennt die logische Folge IMPLIKATION.

Definition 3.14. *logische Implikation*

Eine Aussage K ist die LOGISCHE IMPLIKATION einer Menge von Aussagen $\mathcal{P} = \{P_1,\ldots,P_n\}$ (symbolisch $\mathcal{P} \vDash K$ gdw. $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow K$ eine Tautologie ist.

Definition 3.15. *Gültigkeit*

Ein Schlußschema aus den Prämissen $\mathcal{P} = \{P_1,\ldots,P_n\}$ und der Konklusion K ist GÜLTIG gdw. $\mathcal{P} \vDash K$, d.h. wenn das Konditional $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow K$ eine Tautologie ist; andernfalls ist das Schlußschema NICHT GÜLTIG.

Definition 3.16. *gültiger Schluß*

Ein Schluß ist gültig, wenn er die Instanz eines gültigen Schlußschemas ist.

Um die Gültigkeit eines Schlußschemas zu beweisen, gilt es also zu zeigen, daß das Konditional aus der Konjunktion der Prämissen und der Konklusion eine Tautologie ist. In unserem Beispiel müßte also gezeigt werden daß $(p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow q$ tautologisch ist.

Ein sicheres Verfahren, das immer zum Ziel führt, besteht in der Berechnung der Wahrheitswerte:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Aufgabe: Es soll überprüft werden, ob der folgende Schluß gültig ist:

(3.22.) Wenn Hans Meier ein Konservativer ist,
dann ist er für die Privatisierung der Müllabfuhr
Hans Meier ist für die Privatisierung der Müllabfuhr
$\therefore$ Hans Meier ist ein Konservativer

Dies ist eine Instanz des folgenden Schlußschemas

(3.23.) p$\Rightarrow$ q
q
$\therefore$ p

Dieses Schema wäre gültig, wenn $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ eine Tautologie wäre. Die Wahrheitstabelle dazu lautet:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	w

$(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ ist nicht tautologisch und das zugrunde liegende Schlußschema somit nicht gültig.

3.6.2. NORMALFORMEN

Obwohl die Gültigkeit eines Schlußschemas grundsätzlich immer durch Wahrheitstafeln überprüft werden kann, so ist dies doch oft zu umständlich, insbesondere wenn ein Schlußschema sehr viele verschiedene Aussagenvariable enhält. Für *n* verschiedene Aussagenvariable benötigt man 2^n Zeilen in der Wahrheitstafel. Das folgende Beispiel würde also eine Wahrheitstafel mit 2^5=32 Zeilen erfordern:

(3.24.)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ & p \vee s \\ & q \Rightarrow r \\ & s \Rightarrow t \\ & \underline{\neg r} \\ \therefore & t \end{array}$$

Im folgenden soll daher ein Verfahren beschrieben werden, das bei mehreren Variablen im allgemeinen schneller zum Ziel führt als die Methode der Wahrheitstafeln und im Gegensatz zum Beweis durch Ableitung (s.u.) mechanisch ausgeführt werden kann. Das Verfahren besteht darin, daß man die zu überprüfenden Formeln durch Äquivalenztransformationen auf wohlbestimmte Normalformen bringt, aus denen man sofort erkennen kann, ob eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine Kontingenz vorliegt. Dabei spielen die folgenden Äquivalenzen eine Rolle:

(3.25.) (1) $p \vee \neg p \equiv W$
(2) $p \vee W \equiv W$
(3) $p \wedge \neg p \equiv F$
(4) $p \wedge F \equiv F$
(5) $p \wedge W \equiv p$
(6) $p \vee F \equiv p$

Beispiele für solche Normalformen sind:

(3.26.) (1.a) $(p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg q)$
(1.b) $(p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee \neg p)$
(2.a) $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r \wedge \neg r)$
(2.b) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg\ ) \vee (p \wedge \neg p \wedge r)$

Dabei sind (1.a) und (1.b) Konjunktionen von Disjunktionen und (2.a) und (2.b) Disjunktionen von Konjunktionen.

Die Formel (1.a) ist eine Tautologie. Die 3 Konjunktionsglieder sind alle tautologisch, weil in jeder Disjunktion ein Teilausdruck der Form $P \vee \neg P$ (Äquivalenz (1)) vorkommt und damit wegen $P \vee W \equiv W$ die Disjunktion als ganzes zur Tautologie macht. Die Formel (1.b) hingegen ist keine Tautologie, weil sie kontingente Konjunktionsglieder enthält.

Beispiel (2.a) hingegen ist eine Kontradiktion, da jedes Disjunktionsglied einen Teilausdruck der Form $P \wedge \neg P$ enthält und somit nach Äquivalenz (3) unerfüllbar ist.

Die beiden Formeln (1.a) und (1.b) sind Beispiele für die KONJUNKTIVE NORMALFORM, die Formeln (2.a) und (2.b) sind Beispiele für die DISJUNKTIVE NORMALFORM. Wir werden uns im folgenden auf die konjunktive Normalform beschränken.

Definition 3.17. *Literal*

> Ein LITERAL ist eine Aussagenvariable (positives Literal) oder die Negation einer Aussagenvariable (negatives Literal).

Die Formeln p und $\neg p$ sind Literale.

Definition 3.18. *Klausel*

Eine Formel ist eine KLAUSEL, wenn sie aus einer Disjunktion von Literalen besteht: $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$

Die Formel $p \vee q \vee \neg r$ ist eine Klausel, die Formel $p \wedge q \vee \neg r$ ist keine Klausel.

Definition 3.19. *konjunktive Normalform*

Eine Formel hat die KONJUNKTIVE NORMALFORM, wenn sie aus einer Konjunktion von Klauseln besteht.

Beispiele:

1. $(p \vee \neg p) \wedge (q \vee r \vee \neg q)$ mit den Klauseln $p \vee \neg p$ und $q \vee r \vee \neg q$
2. $(\neg p \vee q \vee r \vee \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg q \vee p)$ mit den Klauseln
   $\neg p \vee q \vee r \vee \neg r$, $q \vee r$ und $\neg q \vee p$

Theorem 3.2

Eine Formel in der konjunktiven Normalform ist eine Tautologie gdw. in jeder Klausel eine Aussagenvariable als positives und negatives Literal vorkommt. □

Beweis: Jede Klausel hat die Form $(p \vee \neg p \vee Q)$, wobei Q eine beliebige Disjunktion von Literalen ist. Das ist jedoch eine Tautologie wegen $p \vee \neg p \equiv W$ und $p \vee W \equiv W$. Wir erhalten somit eine Konjunktion von Tautologien, und das ist eine Tautologie.

Jede Formel läßt sich durch Substitution mit Äquivalenzen in die konjunktive Normalform transformieren.

1. Beseitigung des Bikonditionals (Bikond):
   $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
2. Beseitigung des Konditionals (Kond):
   $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
3. Skopus der Negation verringern (De Morgan):
   $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
   $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
4. Doppelte Negation beseitigen (Neg):
   $\neg\neg p \equiv p$
5. Konjunktion nach außen ziehen (Distributivgesetz der Disjunktion: Distrib):
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6. Gegebenenfalls Anwendung von Kommutativ- und Assoziativgesetzen (Komm, Assoz):
7. Gegebenenfalls Vereinfachungen (Vereinf):
   a. $p \wedge p \equiv p$
   b. $p \vee p \equiv p$
8. Beispiel: Es soll gezeigt werden, daß folgendes Schlußschema gültig ist:

(3.27.)
$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \neg p \\ \therefore & q \end{array}$$

Dies ist dann der Fall, wenn $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ tautologisch ist:

Formel	Umformung mit
$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$	
$\neg[(p \vee q) \wedge \neg p] \vee q$	Kond
$[\neg(p \vee q) \vee \neg\neg p] \vee q$	De Morgan
$[\neg(p \vee q) \vee p] \vee q$	Neg
$[(\neg p \wedge \neg q) \vee p] \vee q$	De Morgan
$[p \vee (\neg p \wedge \neg q] \vee q$	Komm.
$[(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$	Distrib
$q \vee [(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)]$	Komm
$[q \vee (p \vee \neg p)] \wedge [q \vee (p \vee \neg q)]$	Distrib
$(q \vee p \vee \neg p) \wedge (q \vee p \vee \neg q)$	Assoz

In der ersten Klausel kommen p und $\neg p$, in der zweiten q und $\neg q$ vor, folglich ist die Formel tautologisch.

Beispiel:

Es soll gezeigt werden, daß die Formel $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ eine Tautologie ist.

Formel	Umformung mit
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	
$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)$	Kond
$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$	Neg
$[(\neg p \vee q) \Rightarrow (q \vee \neg p)] \wedge [(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q)]$	Bikond
$[\neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p)] \wedge [\neg(q \vee \neg p) \vee (\neg p \vee q)]$	Kond
$[(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)] \wedge [(\neg q \wedge \neg\neg p) \vee (\neg p \vee q)]$	De Morgan
$[(p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)] \wedge [(\neg q \wedge p) \vee (\neg p \vee q)]$	Neg
$\{[p \vee (q \vee \neg p)] \wedge [\neg q \vee (q \vee \neg p)]\} \wedge \{[\neg q \vee (\neg p \vee q)] \wedge [p \vee (\neg p \vee q)]\}$	Distrib
$[(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)] \wedge [(\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q)]$	Assoz
$(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee q)$	Assoz

Die letzte Zeile der Ableitung ist in konjunktiver Normalform. In jeder Klausel kommt eine Aussagenvariable sowohl als positives als auch als negatives Literal vor. Somit haben wir es nach Theorem 3.2 mit einer Tautologie zu tun.

3.6.3. SCHLUßREGELN

Ein weiteres Verfahren, die Gültigkeit eines Schlusses zu beweisen besteht in der Zurückführung des Schlusses auf eine Kette von gültigen Schlüssen. Jede neue Formel, die aus den Prämissen gültig abgeleitet werden kann, sei es durch eine Äquivalenztransformation, oder als Konklusion eines als gültig erwiesenen Schlußschemas, kann als zusätzliche Prämisse im weiteren Beweisgang verwendet werden.

Ähnlich wie bei den Äquivalenztransformationen ist es nützlich, sich einen Vorrat an gültigen Schlußschemata als Schlußregeln anzulegen.

Schlußregel	Beispiel
$p \Rightarrow q$ p	*Modus Ponens* (Abtrennungsregel) (M.P) Wenn Jumbo ein Elefant ist, dann ist er ein Säugetier Jumbo ist ein Elefant
$\therefore$ q	$\therefore$ Jumbo ist ein Säugetier
$p \Rightarrow q$ $\neg q$	*Modus Tollens* (M.T.) Wenn Jumbo ein Elefant ist, dann ist er ein Säugetier Jumbo ist kein Säugetier
$\therefore$ $\neg p$	$\therefore$ Jumbo ist kein Elefant
$p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow r$	*Kettenregel* (K.R.) Wenn Hans ein Bayer ist, dann ist er ein Deutscher Wenn Hans ein Deutscher ist, dann ist er ein Europäer
$\therefore$ $p \Rightarrow r$	$\therefore$ Wenn Hans ein Bayer ist, dann ist er ein Europäer
$p \vee q$ $\neg p \vee r$	*Resolution* (Res.) Der Anlaut ist stimmlos oder der Vokal ist gerundet Der Anlaut ist nicht stimmlos oder der Auslaut ist ein Konsonant
$\therefore$ $q \vee r$	$\therefore$ Der Vokal ist gerundet oder der Auslaut ist ein Konsonant
$p \vee q$ $\neg p$	*Modus Tollendo Ponens* (M.T.P) Dieser Satz ist ein Aussagesatz oder ein Fragesatz Der Satz ist kein Aussagesatz
$\therefore$ q	$\therefore$ Der Satz ist ein Fragesatz
$p \wedge q$	*Vereinfachung* (V.) [p] ist labial und [k] ist velar
$\therefore$ p	$\therefore$ [p] ist labial
p q	*Konjunktion* (K.) Hans ist dumm Fritz ist gescheit
$\therefore$ $p \wedge q$	$\therefore$ Hans ist dumm und Fritz ist gescheit
p	*Addition* (Add.) 'der Baum' ist ein Syntagma
$\therefore$ $p \vee q$	$\therefore$ 'der Baum' ist ein Syntagma oder 'Baum' ist ein Morphem

Abtrennregel

Die am häufigsten verwendete Schlußregel ist die ABTRENNREGEL mit dem traditionellen Namen *modus ponens* (genauer *modus ponendo ponens*) und hat die Form

(3.28.) $p \Rightarrow q$
$\underline{p}$
$\therefore\ q$

Die Gültigkeit dieses Schlusses setzt voraus, daß die Formel $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ eine Tautologie ist. Dies kann auf verschiedene Weise gezeigt werden.

1. Durch eine Wahrheitstafel

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

2. Indirekt durch die Annahme, daß die Formel nicht tautologisch sei, wobei die Berechnung der Wahrheitswerte zu einem Widerspruch führt

$$\begin{array}{ccccccccc} (& p & \Rightarrow & q &) & \wedge & p & \Rightarrow & q \\ & w & w & \underline{w} & & w & w & f & \underline{f} \end{array}$$

Die Annahme, daß der Schluß keine Tautologie ist, führt zu dem Widerspruch, daß q gleichzeitig wahr und falsch sein müßte.

3. Durch Vereinfachung mit Äquivalenztransformationen

Schritt	**Formel**	**Äquivalenzregel**
(1)	$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q)$	Konditional (8.a)
(2)	$\neg[(p\Rightarrow q)\wedge p]\vee q$	De Morgan (7.b)
(3)	$[\neg(p\Rightarrow q)\vee\neg p]\vee q$	Konditional (8.a)
(4)	$[\neg(\neg p\vee q)\vee\neg p]\vee q$	De Morgan (7.a)
(5)	$[(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee\neg p]\vee q$	Negation (6.b)
(6)	$[(p\wedge\neg q)\vee\neg p]\vee q$	Kommutativität (3.a)
(7)	$[\neg p\vee(p\wedge\neg q)]\vee q$	Distributivität (4.a)
(8)	$[(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q)]\vee q$	Kommutativität (3.a)
(9)	$q\vee[(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q)]$	Distributivität (4.a)
(10)	$[q\vee(\neg p\vee p)]\wedge[q\vee(\neg p\vee\neg q)]$	Assoziativität
(11)	$(q\vee\neg p\vee p)\wedge(q\vee\neg p\vee\neg q)$	Kommutativität
(12)	$(q\vee\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg q)$	Komplementarität (6.a)
(13)	$(q\vee W)\wedge(\neg p\vee W)$	Identität (5.b)
(14)	$(q\vee W)\wedge W$	Identität (5.d)
(15)	$q\vee W$	Identität (5.b)
(16)	W	

4. Überführung in konjunktive Normalform. Das ist fast identisch mit dem vorherigen Verfahren. Zeile (11) ist bereits in KNF.

Modus Tollens

Das Schlußschema des *modus tollens* (genauer *modus tollendo tollens*) hat folgende Form (Beispiel s. Tabelle):

(3.29.) $p \Rightarrow q$
$\underline{\neg q}$
$\therefore \neg p$

Der Beweis erfolgt leicht durch die Äquivalenzregel der Kontraposition (8.c) und der soeben bewiesenen Abtrennregel:

(1)	$p \Rightarrow q$	Prämisse
(2)	$\neg q$	Prämisse
(3)	$\neg q \Rightarrow \neg p$	(1), Kontraposition (8.c)
(4)	$\neg p$	(2), (3), Abtrennregel

Kettenregel

Die KETTENREGEL (auch HYPOTHETISCHER SYLLOGISMUS) hat die Form (Beispiel s. Tabelle):

(3.30.) $p \Rightarrow q$
$\underline{q \Rightarrow r}$
$\therefore p \Rightarrow r$

Der Beweis per Wahrheitstafel ist bereits recht umständlich, am einfachsten ist ein indirekter Beweis über Wahrheitswerte:

(	p	$\Rightarrow$	q	)	$\wedge$	(	q	$\Rightarrow$	r	)	$\Rightarrow$	(	p	$\Rightarrow$	r	)
	w	w	$\underline{w}$		w		$\underline{f}$	w	f		f		w	f	f	
	5	6	8		3		9	7	4		1		5	2	4	

Das Konditional ist nur dann falsch (1), wenn die Konklusion falsch (2) und das Antezedens wahr ist (3). Die Konklusion ist wieder ein Konditional und kann nur falsch sein, wenn das rechte Glied falsch (4) und das Antezedens wahr ist (5). Damit sind die Werte für die Variablen p und r festgelegt. Die Konjunktion (3) kann nur wahr sein, wenn beide Konjunktionsglieder wahr sind (6 u. 7). Ein Konditional (6) mit wahrem Antezendens (5) ist wahr, wenn die Konklusion wahr ist (8). Ein Konditional mit falscher Konklusion ist wahr, wenn das Antezendens falsch ist (9). Das führt zu einem Widerspruch, denn nun müßte q gleichzeitig wahr (8) und falsch sein (9). Damit ist die Annahme, daß die Kettenregel keine Tautologie ist widerlegt.

Resolution

(3.31.) $p \vee q$
$\neg p \vee r$
$\therefore q \vee r$

Beweis:

(1)	$p \vee q$	Prämisse
(2)	$\neg p \vee r$	Prämisse
(3)	$q \vee p$	(1), Kommutativität
(4)	$\neg q \Rightarrow p$	(3), Konditional
(5)	$p \Rightarrow r$	(2), Konditional
(6)	$\neg q \Rightarrow r$	(4), (5), Kettenregel
(7)	$q \vee r$	(6), Konditional

Wie wir später sehen werden, spielt diese Schlußregel eine wesentliche Rolle im Beweisverfahren von Prolog, das auschließlich auf Resolution beruht.

Modus Tollendo Ponens

(3.32.) $p \vee q$
$\underline{\neg p}$
$\therefore$ q

Beweis:

(1)	$p \vee q$	Prämisse
(2)	$\neg p$	Prämisse
(3)	$\neg\neg p \vee q$	(1), Negation (6.b)
(4)	$\neg p \Rightarrow q$	(3), Konditional (8.a)
(5)	q	(2), (4), Abtrennregel

Vereinfachung

(3.33.) $\underline{p \wedge q}$
$\therefore$ p

Beweis:

(1)	$p \wedge q \Rightarrow p$	
(2)	$\neg(p \wedge q) \vee p$	Konditional
(3)	$p \vee \neg(p \wedge q)$	Kommutativität
(4)	$p \vee \neg p \vee \neg q$	De Morgan
(5)	$W \vee \neg q$	Komplementarität
(6)	$\neg q \vee W$	Kommutativität
(7)	W	Identität

Konjunktion

(3.34.) p
$\underline{q}$
$\therefore$ $p \wedge q$

Beweis:

(1)	$p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$	
(2)	$\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$	Konditional
(3)	$(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$	Kommutativität
(4)	W	Komplementarität

$(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$ ist eine Instanz von $p \vee \neg p$ mit der Substitution $\{p/p \wedge q\}$

Addition

(3.35.) $\underline{p}$

$\therefore\ p \vee q$

Beweis:

(1)	$p \Rightarrow p \vee q$	
(2)	$\neg p \vee p \vee q$	Konditional
(3)	$p \vee \neg p \vee q$	Kommutativität
(4)	$W \vee q$	Komplementarität
(5)	$q \vee W$	Kommutativität
(6)	W	Identität

Aufgabe: Der Butler oder der Koch oder der Chauffeur hat den Baron umgebracht. Wenn der Koch den Baron umgebracht hat, dann war der Eintopf vergiftet, und wenn der Chauffeur den Baron umgebracht hat, dann war eine Bombe im Auto. Der Eintopf war nicht vergiftet und der Butler hat den Baron nicht umgebracht. Also hat der Chauffeur den Baron umgebracht.

Überprüfen Sie die Gültigkeit dieses Schlusses.

Es sei

B = Der Butler hat den Baron umgebracht.

K = Der Koch hat den Baron umgebracht.

C = Der Chauffeur hat den Baron umgebracht.

E = Der Eintopf war vergiftet

b = Es war eine Bombe im Auto

Beweis:

(1)	$B \vee K \vee C$	Prämisse
(2)	$(K \Rightarrow E) \wedge (C \Rightarrow b)$	Prämisse
(3)	$\neg E \wedge \neg B$	Prämisse
(4)	$\neg B$	(3), Vereinf.
(5)	$K \vee C$	(1), (4), Modus Tollendo Ponens
(6)	$K \Rightarrow E$	(2), Vereinf.
(7)	$\neg E$	(3), Vereinf.
(8)	$\neg K$	(6), (7), Modus Tollens
(9)	C	(5), (8), Modus Tollendo Ponens

3.6.4. DER KONDITIONALBEWEIS

Unter bestimmten Umständen können Schlüsse, deren Konklusion ein Konditional als Hauptverknüpfung enthält, mit der Methode des Konditionalbeweises leichter bewiesen werden. Angenommen ein Schluß enthält die Aussagen *p, q, r, ..., z* als Prämissen und $m \Rightarrow n$ als Konklusion. In einem Konditionalbeweis wird das Antezedens des Konditionals (hier also *m*) als vorläufige Prämisse hinzugenommen und dann *n* als Konklusion abgeleitet. Anstatt

(3.36.)
$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ & r \\ & \vdots \\ & \underline{z} \\ \therefore & m \Rightarrow n \end{array}$$

zu beweisen, beweisen wir

(3.37.)
$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ & r \\ & \vdots \\ & z \\ & \underline{m} \\ \therefore & n \end{array}$$

Ein Schlußschema ist dann und nur dann gültig, wenn die Implikation mit der der Konjunktion der Prämissen als Antezedens und der Konklusion als Konsequens eine Tautologie ist, in unserem Fall muß das für $(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \Rightarrow (m \Rightarrow n)$ einerseits und $(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z \wedge m) \Rightarrow n$ andererseits gelten. Die Gültigkeit des Konditionalbeweises beruht auf der Tatsache, daß diese beiden Aussagenverbindungen logisch äquivalent sind, wie folgende Ableitung zeigt:

(1)	$(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \Rightarrow (m \Rightarrow n)$	
(2)	$\neg(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \vee (m \Rightarrow n)$	(1) Kond.
(3)	$\neg(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \vee (\neg m \vee n)$	(2) Kond.
(4)	$(\neg(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \vee \neg m) \vee n$	(3) Assoz.
(5)	$\neg((p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \wedge m) \vee n$	(4) DeM.
(6)	$((p \wedge q \wedge \ldots \wedge z) \wedge m) \Rightarrow n$	(5) Kond.

Beispiel:

(3.38.)
$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow (q \vee r) \\ & \underline{\neg r} \\ \therefore & p \Rightarrow q \end{array}$$

Beweis:

(1)	$p \Rightarrow (q \vee r)$	Prämisse
(2)	$\neg r$	Prämisse
(3)	p	Konditionalbeweis
(4)	$q \vee r$	(1),(3), Modus Ponens
(5)	$r \vee q$	(4),Kommutativität
(6)	q	(2),(5), Modus Tollendo Ponens
(7)	$p \Rightarrow q$	Konditionalbeweis

3.6.5. Der indirekte Beweis (*Reductio ad absurdum*)

Die bisherigen Beweisverfahren gehören all zur Klasse der direkten Beweise, die durch eine endliche Folge von gültigen Ableitungsschritten als letzte Zeile einer Ableitung die Konklusion liefern.

Ein besonders in der Mathematik häufig verwendetes Beweisverfahren ist der INDIREKTE BEWEIS, traditionell auch *reductio ad absurdum* genannt. Bei einem indirekten Beweis wird die Negation der zu beweisenden Konklusion als vorläufige Prämisse hinzugenommen, und zu zeigen versucht, daß die so entstandene Aussagenmenge zu einem Widerspruch führt. Wenn die einzelnen Ableitungsschritte zulässig sind, dann kommt man zu einem Widerspruch dann, wenn eine oder mehrere Prämissen falsch sind. Da alle ursprünglichen Prämissen als wahr vorausgesetzt werden, muß die als Prämisse hinzugenommene Negation der zu beweisenden Konklusion falsch sein. Somit ist die zu beweisende Konklusion wahr. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

(3.39.) $p \vee q$
$q \Rightarrow r$
$\underline{\neg r}$
$\therefore\ p$

Bei einem indirekten Beweis geht man folgendermaßen vor:

(1)	$p \vee q$	Prämisse	
(2)	$q \Rightarrow r$	Prämisse	
(3)	$\neg r$	Prämisse	
	(4)	$\neg p$	Indirekter Beweis
	(5)	q	(1),(4) Modus Tollendo Ponens
	(6)	r	(2),(5) Modus Ponens
	(7)	$r \wedge \neg r$	(3),(6) Konjunktion
(8)	p		

Zu beweisen ist *p*. In Zeile (4) wird die Negation $\neg p$ vorläufig zu den Prämissen hinzugenommen. Dies führt in Zeile (7) zu dem Widerspruch $r \wedge \neg r$. $\neg p$ muß daher falsch sein. Somit ist *p* wahr.

3.6.6. DAS RESOLUTIONSPRINZIP

Der indirekte Beweis (*reductio ad absurdum*) hat in den letzten Jahrzehnten in Verbindung mit dem Schlußschema der RESOLUTION und der KONJUNKTIVEN NORMALFORM in der Forschung zum automatischen Beweisen große Bedeutung erlangt. Dieses sog. RESOLUTIONSPRINZIP wurde in den sechziger Jahren von J. A. Robinson (s. ROBINSON 1965) begründet.

Dieses Prinzip beruht wie der Name schon sagt auf dem Schlußschema der Resolution:

(3.40.) $p \vee q$
$\underline{\neg p \vee r}$
$\therefore\ q \vee r$

Man bezeichnet die Konklusion beim Resolutionsschema als RESOLVENTE.

Der Beweis soll hier der Bequemlichkeit halber noch einmal aufgeführt werden:

(1)	$p \vee q$	Prämisse
(2)	$\neg p \vee r$	Prämisse
(3)	$q \vee p$	(1), Kommutativität
(4)	$\neg q \Rightarrow p$	(3), Konditional
(5)	$p \Rightarrow r$	(2), Konditional
(6)	$\neg q \Rightarrow r$	(4), (5), Kettenregel
(7)	$q \vee r$	(6), Konditional

Der Schluß ist jedoch auch intuitiv einsichtig: Ist p wahr, dann muß $\neg p$ falsch sein. Wenn nach Voraussetzung aber $\neg p \vee r$ wahr sein soll, und $\neg p$ aber falsch ist, dann muß r wahr sein. Ist andererseits aber p falsch, dann muß wenn $p \vee q$ wahr sein soll, q wahr sein. Nimmt man beide Möglichkeiten zusammen, so ergibt sich $q \vee r$.

Man kann das Schlußschema des *Modus Tollendo Ponens* als Sonderfall der Resolution auffassen:

(3.41.)
$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \underline{\neg p} \\ \therefore & q \end{array}$$

Mit anderen Worten, die Resolution von $p \vee q$ und $\neg p$ hat als Resolvente q.

(1)	$p \vee q$	Prämisse
(2)	$\neg p$	Prämisse
(3)	$\neg p \vee F$	Addition
(4)	$q \vee F$	Resolution
(5)	q	Identität

Ein weiterer Sonderfall ist die Resolution von p und $\neg p$, die zum Widerspruch führt. Man könnte wie folgt argumentieren:

(1)	p	Prämisse
(2)	$\neg p$	Prämisse
(3)	$p \vee F$	Addition
(4)	$\neg p \vee F$	Addition
(5)	$F \vee F$	(3),(4) Resolution
(6)	F	Idempotenz

Man bezeichnet die Resolvente von p und $\neg p$ mit $\square$.

Voraussetzung für die fruchtbare Anwendung des Resolutionsschemas ist, daß alle Prämissen Klauselform haben, d.h. Disjunktionen von Literalen sind. Dazu müssen Formeln gegebenenfalls in die konjunktive Normalform übersetzt werden. Die einzelnen Klauseln einer Konjunktion werden zu selbständigen Prämissen (Vereinfachunsschema).

Das Beweisverfahren ist das des indirekten Beweises, d.h. die Negation der zu beweisenden Aussage wird zu den Prämissen hinzugenommen. Es wird dann das Resolutionsschema auf Paare von Aussagen angewandt und die Resolvente zur Aussagenmenge hinzugefügt, solange bis ein Widerspruch entsteht oder die Resolution nicht mehr angewandt werden kann.

Prämissen	**Übersetzt in Klauselform**		
$p \vee q$	(1)	$p \vee q$	
$q \Rightarrow r$	(2)	$\neg q \vee r$	
$\neg r$	(3)	$\neg r$	
	(4)	$\neg p$	Indirekter Beweis
	(5)	$\neg q$	(2),(3) Resolution
	(6)	p	(1),(5) Resolution
	(7)	$\square$	(5),(6) Resolution

Das Verfahren zum Beweis einer Aussage p nach dem Resolutionsprinzip auf der Grundlage einer Aussagenmenge $\mathcal{P}$ kann wie folgt beschrieben werden:

1. Übersetze alle Aussagen aus $\mathcal{P}$ in Klauselform. Die so erhaltene Klauselmenge sei $\mathcal{K}$.
2. Negiere p, übersetze das Resultat in Klauselform und füge das Ergebnis zur Klauselmenge $\mathcal{K}$ hinzu.
3. Wiederhole die folgenden Schritte solange, bis eine Kontradiktion gefunden ist, oder erkennbar ist, daß kein Ergebnis erzielbar ist.
   a) Wähle zwei Klauseln K_1 und K_2 aus der jeweils gültigen Klauselmenge $\mathcal{K}_n$ derart, daß es ein Literal L gibt, das in einer der beiden Kauseln positiv, in der anderen negativ vorkommt.
   b) Bilde die Resolvente R aus K_1 und K_2.
   c) Wenn $R = \square$, dann ist ein Widerspruch gefunden worden. Andernfalls füge R zur Klauselmenge $\mathcal{K}_n$ hinzu.

Nehmen wir als weiteres Beispiel die Aufgabe von Seite.

Prämissen	**Übersetzt in Klauselform**		
$B \vee K \vee C$	(1)	$B \vee K \vee C$	
$(K \Rightarrow E) \wedge (C \Rightarrow b)$	(2)	$\neg K \vee E$	
	(3)	$\neg C \vee b$	
$\neg E \wedge \neg B$	(4)	$\neg E$	
	(5)	$\neg B$	
	(6)	$\neg C$	Ind. Bew.
	(7)	$K \vee C$	(1),(5)
	(8)	$\neg K$	(2),(4)
	(9)	C	(7),(8)
	(10)	$\square$	(6),(9) (Kontrad.)

LITERATUR

ALLWOOD, JENS/ANDERSSON, LARS-GUNNAR/DAHL, ÖSTEN

1973 *Logik für Linguisten.* Ins Deutsche übersetzt von Michael Grabski. (= Romanistische Arbeitshefte 8.) Max Niemeyer Verlag: Tübingen.

GENESERETH, MICHAEL R. / NILSSON NILS J.

1987 *Logical Foundations of Artificial Intelligence.* Morgan Kaufmann Publishers: Los Altos, CA.

HERINGER, HANS JÜRGEN

1972 *Formale Logik und Grammatik.* (= Germanistische Arbeitshefte 6.) Max Niemeyer Verlag: Tübingen.

MCCAWLEY JAMES D.

1981 *Everything that Linguists have always Wanted to Know about Logic but were ashamed to ask.* Basil Blackwell: Oxford.

PARTEE, BARBARA HALL

1978 *Fundamentals of Mathematics for Linguistics.* D. Reidel Publishing Company: Dordrecht/ London.

PARTEE, BARBARA H./TER MEULEN, ALICE/WALL, ROBERT E.

1990 *Mathematical Methods in Linguistics.* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/London. [Entstanden aus PARTEE (1978) und WALL (1973)]

ROBINSON, J.A.

1965 A Machine-oriented Logic Based on the Resolution Principle. In: *Journal of the Association for Computing Machinery* **12**, 23--41.

SUPPES, PATRICK;

1957 *Introduction to Logic*. D. van Nostrand Company: Princeton, N.J./Toronto/London/New York.

WALL, ROBERT

1973a *Einführung in die Logik und Mathematik für Linguisten. Band 1: Logik und Mengenlehre.* Übersetzt von Wolfgang Klein, Angelika Kratzer und Arnim v. Stechow. Scriptor Verlag: Kronberg, Ts.

1973b *Einführung in die Logik und Mathematik für Linguisten. Band 2: Algebraische Grundlagen.* Übersetzt von Wolfgang Klein, Angelika Kratzer und Arnim v. Stechow. Scriptor Verlag: Kronberg, Ts.

Kapitel 4.
Grundbegriffe der Prädikatenlogik

Wir haben gesehen, daß eine der wesentlichen Aufgaben der Aussagenlogik die Untersuchung des logischen Schließens ist. Es ging u.a. darum zu zeigen, unter welchen allgemeinen Bedingungen Schlüsse gültig sind. Es ist gezeigt worden, daß ein Schluß dann gültig ist, wenn er die Instanz (ein Einsetzungsbeispiel) eines gültigen Schlußschemas ist, wobei die Gültigkeit eines Schlußschemas auschließlich eine Folge des formalen Aufbaus des Schemas ist. Beispielsweise ist der Schluß

(4.1.) Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich
Sokrates ist ein Mensch
∴ Sokrates ist sterblich

eine Instanz des gültigen Schlußschemas (*Modus Ponens*)

(4.2.) $p \Rightarrow q$
p
_____
∴ q

Dabei sind p und q Aussagenvariable, die für beliebige Aussagen stehen, deren innerer Aufbau ohne Belang ist. Aus der Nichtberücksichtigung der inneren Struktur von Aussagen ergeben sich allerdings Probleme. Man wird beispielsweise sagen wollen, daß auch der folgende Schluß gültig ist:

(4.3.) Menschen sind sterblich
Sokrates ist ein Mensch
_____
∴ Sokrates ist sterblich

Diese intuitive Einsicht läßt sich jedoch im Rahmen der Aussagenlogik nicht mehr begründen. Wenn wir die Aussagen dieses Schlusses durch Variable ersetzen erhalten wir folgendes Schema

(4.4.) p
q
___
∴ r

Dies ist keinesfalls ein gültiges Schema, denn die Aussagenform $p \wedge q \Rightarrow r$ ist keine Tautologie.

Man betrachte weiterhin die folgenden Beispiele:

(4.5.) Manche Menschen sind faul.
Alle Faulen schlafen viel
∴ Manche Menschen schlafen viel

(4.6.) Ein Pferd ist ein Tier
_____
∴ Ein Pferdekopf ist der Kopf eines Tieres

(4.7.) Hans ist ein Junggeselle
Alle männlichen Verwandten von Maria sind verheiratet
_____
∴ Hans ist nicht der Onkel von Maria

Es handelt sich in allen drei Fällen um gültige Schlüsse. Die Frage jedoch, inwieweit die Gültigkeit dieser Schlüsse allein von der Form abhängt, kann nicht mehr im Rahmen der Aussagenlogik geklärt werden. Dazu muß vielmehr die innere Struktur der Aussagen selbst mit berücksichtigt werden. Dafür sind zusätzliche sprachliche Ausdrucksmittel erforderlich, die in der PRÄDIKATENLOGIK entwickelt werden. Die Prädikatenlogik ist also eine Erweiterung der Aussagenlogik.[17]

Sie untersucht ebenfalls Aussagen und Aussagenverbindungen. Während die Aussagenlogik aber die Aussagen als unanalysierte Ganzheiten betrachtet, untersucht die Prädikatenlogik auch die innere Struktur von Aussagen.

4.1. Individuen und Prädikate

Für die Prädikatenlogik sind Aussagen selbst komplexe Gebilde, die nach bestimmten Regeln aufgebaut sind. Eine genauere Darstellung der Syntax der Prädikatenlogik folgt später. Wir wollen zunächst informell von der Annahme ausgehen, daß Aussagen aus Begriffen zusammengesetzt sind. Man vergleiche die folgenden Sätze:

(4.8.) Der Mond ist ein Planet

(4.9.) Das Pferd ist ein Säugetier

Beide Sätze sind Ausdrücke für Aussagen. Sie haben die gleiche syntaktische Struktur. Für die Aussagenlogik entscheidend ist nur, daß (4.8) eine falsche Aussage ist, (4.9) dagegen eine wahre. Untersucht man jedoch die logische Struktur dieser Aussagen genauer, so zeigt sich, daß sie sich in wesentlichen Punkten unterscheiden.

Das Wort *Mond* bezeichnet in der Alltagssprache einen INDIVIDUALBEGRIFF, d.h. einen Begriff, der ein einziges INDIVIDUUM repräsentiert. Es ist also ein Name wie die Eigennamen *Peter, Fritz,* etc. Namen als Zeichen für Individualbegriffe werden in der Prädikatenlogik INDIVIDUENKONSTANTEN genannt und konventionell durch die ersten Buchstaben des Alphabets (*a, b, c* …) symbolisiert.

Die Wörter *Planet, Pferd* und *Säugetier* bezeichnen dagegen ALLGEMEINBEGRIFFE, d.h. Begriffe, die eine Klasse repräsentieren und damit auf alle Elemente dieser Klasse zutreffen.

Der Satz *Der Mond ist ein Planet* sagt aus, daß dem Individuum *Mond* das PRÄDIKAT *Planet* zukommt. Man schreibt dafür

(4.10.) *Planet*(*Mond*)

Ein Prädikat kann ein Zeichen für einen Allgemeinbegriff sein (z.B. *Planet, Pferd, Säugetier),* aber auch ein Zeichen für einen Eigenschaftsbegriff (z.B. *groß, klein, rot*). Der Satz (4.11)(a) hat also die gleiche logische Struktur wie der Satz (4.11)(b):

(4.11.) (a) Peter ist Student *Student (Peter)*
(b) Peter ist dumm *dumm (Peter)*

Der prädikatenlogische Begriff 'Prädikat' darf also nicht mit dem grammatischen Begriff der traditionellen Grammatik verwechselt werden.

4.2. Quantoren

4.2.1. ALLQUANTOR

Nicht alle Aussagen enthalten Individualbegriffe. Das zeigt die Analyse des Satzes

(4.9) Das Pferd ist ein Säugetier

Man kann statt dessen auch sagen

[17] Man kann die Aussagenlogik auch als einen Grenzfall der Prädikatenlogik betrachten.

(4.12.) (a) Ein Pferd ist ein Säugetier *oder*
(b) Pferde sind Säugetiere

Die Bedeutung dieser Aussage läßt sich etwa wie folgt umschreiben

(4.13.) Wenn *etwas* ein Pferd ist, dann ist *es* auch ein Säugetier.

Dabei sind *etwas* und *es* die umgangssprachliche Wiedergabe von VARIABLEN, die für beliebige Individuen eines Individuenbereichs stehen. Die Ausdrücke *etwas ist ein Pferd* bzw. *es ist ein Säugetier* werden wie folgt symbolisiert

(4.14.) (a) *Pferd*(x)
(b) *Säugetier*(x)

Solche Ausdrücke bezeichnet man als Aussagenformen. Dabei ist x eine Leerstelle, in die eine Individuenkonstante (z.B. *Halla*) eingesetzt werden kann. Man nennt solche Leerstellen INDIVIDUENVARIABLEN.

Definition 4.1. *Aussageform*

Eine Aussageform ist ein Ausdruck, der bei Ersetzung der Individuenvariablen durch Individuenkonstanten in eine Aussage übergeht.

Die Formulierung (4.13) zeigt, daß in (4.9) sozusagen die folgende Implikation steckt:

(4.15.) *Pferd*(x) $\Rightarrow$ *Säugetier*(x)

Das ist noch keine Aussage, sondern ebenfalls eine Aussageform. Sie wird zu einer Aussage dadurch, daß die Individuenvariable durch eine Individuenkonstante ersetzt wird, z.B.:

(4.16.) (a) *Pferd(Halla)* $\Rightarrow$ *Säugetier(Halla)*
(b) *Pferd(Nimrod)* $\Rightarrow$ *Säugetier(Nimrod)*

Die Aussagenform (4.15) wird zu einer Aussage auch durch den Zusatz, daß sie für jedes beliebige x gelten soll. Das kommt auch durch die folgenden Paraphrasen von (4.9.) zum Ausdruck:

(4.17.) (a) Jedes Pferd ist ein Säugetier
(b) Alle Pferde sind Säugetiere

Dafür kann man formeller sagen:

(4.18.) Für alle (jedes) x gilt: wenn x ein Pferd ist, dann ist x auch ein Säugetier

Der Ausdruck *für alle (jedes) x gilt* wird durch $\bigwedge x$ symbolisiert. Der Ausdruck $\bigwedge x$ wird ALLQUANTOR genannt.[18]

Dieses Zeichen kann als ein großes Konjunktionszeichen aufgefaßt werden, denn der Allquantor kann als "Summierung" einer Konjunktion von Elementaraussagen aufgefaßt werden:

$$\bigwedge_{x=a_1}^{x=a_n} x\, p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots \wedge p(a_n).$$

Eine Aussageform wie (4.9.) wird zu einer Aussage, wenn man sie durch einen Quantor "bindet". Dabei wird der Quantor vor die Aussageform gestellt, auf die er sich bezieht:

(4.19.) $\bigwedge x\, (Pferd(x) \Rightarrow Säugetier(x))$

[18] Es gibt andere Konventionen zur Wiedergabe von "für alle x gilt P", z.B. (x)P und $\forall$x P.

Der Ausdruck (4.19.) ist die prädikatenlogische Darstellung der Aussage (4.9.)

Die Analyse hat gezeigt, daß die äußerlich so ähnlichen Sätze (4.8.) und (4.9.) Aussagen von sehr verschiedener Struktur ausdrücken.

Die Analyse der internen Struktur von Aussagen ist notwendig, um die Gesetzmäßigkeiten des logischen Schließens untersuchen zu können. Wir haben eingangs gesagt, daß die Gültigkeit des Schlusses (4.3.) mit den Mitteln der Aussagenlogik nicht zu etablieren ist. Die gleiche Struktur hat

(4.20.) Fußballspieler sind bestechlich
Fritz ist ein Fußballspieler

∴ Fritz ist bestechlich

In prädikatenlogischer Darstellung lautet dieser Schluß:

(4.21.) (a) $\bigwedge x\ (Fußballspieler(x) \Rightarrow bestechlich(x))$
(b) $Fußballspieler(Fritz)$

(c) $\therefore bestechlich(Fritz)$

Aussagen mit einem Allquantor werden ALLAUSSAGEN genannt. Sie sollen für alle Objekte eines bestimmten Gegenstandsbereichs gelten. Allaussagen gehen in Einzelaussagen über, wenn man die Variablen durch Konstanten ersetzt.

Ersetzt man in (4.21.)(a) die Variable durch *Fritz,* so erhält man die Einzelaussage

(4.22.) $Fußballspieler(Fritz) \Rightarrow bestechlich\ (Fritz)$

Die Allaussage (4.21.)(a) wird als wahr vorausgesetzt. Folglich muß auch die Aussage (4.22.)als wahr vorausgesetzt werden, denn sie ist nur ein Sonderfall von (4.21.)(a). Es gilt allgemein das folgende Schlußschema (Allbeseitigung):

(4.23.) $\bigwedge x\ p(x)$

$\therefore\ p(a)$

Damit läßt sich der Schluß (4.21.)(a) zurückführen auf das Schema *Modus Ponens:*

(4.24.)	(1) $\bigwedge x\ (Fußballspieler(x) \Rightarrow bestechlich(x))$	Prämisse
	(2) $Fußballspieler(Fritz)$	Prämisse
	(3) $Fußballspieler(Fritz) \Rightarrow bestechlich(Fritz)$	(1) Allbeseitigung
	(4) $bestechlich(Fritz)$	(2), (3), Modus Ponens

4.2.2. EXISTENZQUANTOR

Neben Allaussagen gibt es noch andere "quantifizierte" Aussagen, z.B.:

(4.25.) Einige Menschen sind Kannibalen

Wenn jemand (4.25.) behauptet, dann kann er den Beweis für seine Behauptung antreten, indem er mindestens einen Menschen vorführt, auf den das Prädikat Kannibale zutrifft. Wenn es mehr als einer ist, umso besser. Der logische Sinn von (4.25.) ist also:

(4.26.) Es gibt mindestens einen Menschen, der Kannibale ist

(4.27.) Es gibt mindestens ein x, für das gilt: x ist ein Mensch und x ist Kannibale.

Der Ausdruck *es gibt (mindestens) ein x, für das gilt* wird durch das Zeichen $\bigvee x$ symbolisiert und EXISTENZQUANTOR genannt. Aussagen mit Existenzquantor heißen EXISTENZAUSSAGEN, sie behaupten die Existenz von Objekten mit bestimmten Eigenschaften.[19]

Das Zeichen $\bigvee$ ist ein großes Disjunktionszeichen, was darin begründet ist, daß eine Existenzaussage als die "Summierung" einer Disjunktion von Elementaraussagen aufgefaßt werden kann:

$$\bigvee_{x = a_1}^{x = a_n} p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \ldots \vee p(a_n)$$

Die prädikatenlogische Darstellung von (4.25.) lautet also:

(4.28.) $\bigvee x\ (Mensch(x) \wedge Kannibale(x))$

4.2.3. DAS VERHÄLTNIS VON ALLQUANTOR UND EXISTENZQUANTOR

Wie muß nun ein Satz wie (4.29.) prädikatenlogisch dargestellt werden?

(4.29.) Kein Mensch ist unfehlbar

Es wird offenbar ausgesagt, daß das Prädikat unfehlbar auf keinen Menschen zutrifft, anders ausgedrückt, daß für alle Menschen gilt, daß sie nicht unfehlbar sind:

(4.30.) (a) Für alle *x* gilt: wenn *x* ein Mensch ist, dann ist es nicht der Fall, daß *x* unfehlbar ist.

(b) $\bigwedge x\ (Mensch(x) \Rightarrow \neg unfehlbar(x))$

Genausogut hätte man allerdings auch formulieren können

(4.31.) (a) Für alle *x* gilt: es ist nicht der Fall, daß x ein Mensch und gleichzeitig unfehlbar ist.

(b) $\bigwedge x\ \neg(Mensch(x) \wedge unfehlbar(x))$

Formal ergibt sich dieser Zusammenhang aus den Gesetzen der Aussagenlogik, wo beispielsweise die Äquivalenzen $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ und $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ gelten. Damit erhalten wir folgende Ableitung:

$Mensch(x) \Rightarrow \neg unfehlbar(x)$

$\neg Mensch(x) \vee \neg unfehlbar(x)$

$\neg(Mensch(x) \wedge unfehlbar(x))$

Die Ausdrücke (4.30.)(b) und (4.31.)(b) besagen das gleiche, sie sind ÄQUIVALENT.

Nun kann man statt (4.29.) auch sagen

(4.32.) (a) Es gibt keinen Menschen, der unfehlbar ist

(b) Es ist nicht der Fall, daß es ein *x* gibt, so daß gilt: *x* ist ein Mensch, und *x* ist unfehlbar

(c) $\neg \bigvee x\ (Mensch(x) \wedge unfehlbar(x))$

Etwas anderes bedeutet

(4.33.) Nicht jeder Mensch ist glücklich

---

[19] Eine alternative Konvention für den Existenzquantor ist $\exists x\ p(x)$.

Dieser Satz kann folgendermaßen paraphrasiert werden:

(4.34.) (a) Es ist nicht der Fall, daß alle Menschen glücklich sind

(b) $\neg\bigwedge x\ (Mensch(x) \Rightarrow glücklich(x))$

Die gleiche Bedeutung wie (4.34.) hat auch

(4.35.) (a) Manche Menschen sind nicht glücklich

(b) Es gibt Menschen, die nicht glücklich sind

(c) $\bigvee x\ (Mensch(x) \wedge \neg glücklich(x))$

Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen Allaussagen und Existenzaussagen, bei dem die Negation eine wichtige Rolle spielt. Man kann daher auch Regeln formulieren, nach denen Aussagen in andere Aussagen umgeformt werden können, ohne daß sich die Wahrheitsbedingungen ändern. So gelten z.B. allgemein folgende Äquivalenzbeziehungen:

(4.36.) (a) $\bigwedge x\ P \equiv \neg\bigvee x\ \neg P$

("Für alle x gilt P" ist äquivalent mit "es gibt kein x für das P nicht gilt")

(b) $\bigvee x\ P \equiv \neg\bigwedge x\ \neg P$

("Es gibt ein x für das P gilt" ist äquivalent mit "es ist nicht der Fall, daß für alle x P nicht gilt")

Diese Äquivalenzen lassen sich formal auch noch folgendermaßen begründen: Wir haben gesehen, daß die Quantoren $\bigwedge x$ und $\bigvee x$ sozusagen als "Summenzeichen" der Konjunktion bzw. der Disjunktion gelten können:

$\bigwedge x\ p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \ldots\ p(a_n)$

Nach dem Gesetz der Negation gilt dann auch:

$\neg\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \ldots)$ bzw.

$\neg[\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \ldots)]$

Aufgrund der Assoziativität der Konjunktion $(P \wedge (Q \wedge R)) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge Q \wedge R$ können wir darauf schrittweise das Gesetz von de Morgan anwenden:

$\neg[\neg p(a_1) \vee \neg(p(a_2) \wedge p(a_3) \wedge \ldots)]$

$\neg[\neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \neg(p(a_3) \wedge p(a_4) \wedge \ldots)]$

usw.

$\neg(\neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \neg(p(a_3) \vee \neg p(a_4) \vee \ldots)$

$\neg\bigvee x\ \neg p(x)$

4.3. Relationen

Die bisher behandelten Aussagen bestehen entweder aus einer Individuenkonstante und einem Prädikat, sind also von der Form $P(a)$, oder aus einer quantifizierten Verbindung von Aussageformen der Art $P(x)$.

Die Aussage (4.37.) dagegen enthält zwei Individuenkonstanten: *Peter* und *Fritz.*

(4.37.) Peter ist größer als Fritz

Die Aussage (4.37.)hat die Form

(4.38.) x ist größer als y

wobei x und y Individuenvariablen sind. Den verbleibenden Teil *ist größer als* nennt man ebenfalls Prädikat. Ebenso ist der Ausdruck *liegt zwischen ... und* in (4.39.) ein Prädikat:

(4.39.) (a) Bremen liegt zwischen Frankfurt und Hamburg
(b) x liegt zwischen y und z

Man kann also zwischen Aussagen mit einer Individuenkonstante und solche mit mehr als einer Individuenkonstante unterscheiden. Die entsprechenden Aussagenformen enthalten dann eine oder mehrere Leerstellen (Variablen). Man nennt die in diesen Aussagen bzw. Aussagenformen enthaltenen Prädikate daher jeweils EINSTELLIGE, ZWEISTELLIGE, DREISTELLIGE etc. Prädikate.

Mehrstellige Prädikate stehen für RELATIONSBEGRIFFE, d.h. für Begriffe, die irgendwelche Beziehungen zwischen Objekten repräsentieren. Man nennt mehrstellige Prädikate daher auch RELATIONEN.

Auch Substantive können Relationen sein, z.B.:

(4.40.) (a) Hans und Paul sind Brüder
(b) Hans ist Bruder von Paul

Aussagen mit Relationen (mehrstelligen Prädikaten) symbolisiert man ähnlich wie Aussagen mit einstelligen Prädikaten, indem man zuerst die Relation nennt und dahinter die Individuenkonstanten (bzw. Variablen) in Klammern setzt:

(4.41.) (a) $R(a, b)$
(b) $R(x, y)$

Prädikate bezeichnen also

- Allgemeinbegriffe (z.B. Pferd, Katze)
- Eigenschaftsbegriffe (z.B. groß, rot)
- Relationsbegriffe (z.B. größer als)

Wie muß nun eine Aussage (4.42.) analysiert werden?

(4.42.) Pferde sind größer als Kaninchen

Es wird ausgesagt, daß die Beziehung "x ist größer als y" zwischen jedem beliebigen Pferd einerseits und jedem beliebigen Kaninchen andererseits gilt. Anders ausgedrückt, jedes Element aus der Menge der Pferde ist größer als jedes Element aus der Menge der Kaninchen:

(4.43.) (a) Für alle x und alle y gilt: wenn x ein Pferd ist und y eine Katze, dann ist x größer als y
(b) $\bigwedge x \bigwedge y\ (Pferd(x) \wedge Katze(y) \Rightarrow größer\ als(x, y))$

Man vergleiche auch

(4.44.) (a) Manche Menschen gleichen sich
(b) Es gibt mindestens einen Menschen x und einen Menschen y, so daß gilt: x gleicht y
(c) $\bigvee x \bigvee y\ (M(x) \wedge M(y) \wedge G(x, y))$

4.4. Die Syntax der Prädikatenlogik

Nach der vorangegangenen eher informellen Besprechung der sprachlichen Erweiterungen der Aussagenlogik in der Prädikatenlogik, können wir jetzt daran gehen, die Sprache der Prädikatenlogik durch genaue Syntaxregeln präzise zu definieren. Sie ist bestimmt durch eine Menge von Grundzeichen, einem ALPHABET, und der Menge der (wohlgeformten) FORMELN, die aus dem Alphabet konstruierbar sind.

Definition 4.2. *Alphabet*

Ein ALPHABET besteht aus folgenden Symbolklassen:

Individuenvariable: $x, y, z, x_1 \ldots, y_1 \ldots, z_1 \ldots$
Individuenkonstante: $a, b, c, \ldots, a_1 \ldots, b_1 \ldots, c_1 \ldots$
Funktionen: $f, g, h, f_1 \ldots, g_1 \ldots, h_1 \ldots$ mit verschiedener Stelligkeit >0.
Prädikaten: $p, q, r, p_1 \ldots, q_1 \ldots, r_1 \ldots$ mit verschiedener Stelligkeit ≥ 0.
Negation: $\neg$
Konjunktion und Disjunktion: $\wedge, \vee$
Konditional und Bikonditional $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
Allquantor: $\bigwedge$
Existenzquantor: $\bigvee$
Interpunktionszeichen: (,), [,], {,} und ",".

Zur Bezeichnung von Variablen, Konstanten, Funktionen und Prädikaten werden hier die üblichen Konventionen angenommen. Zur Beschreibung eines bestimmten Gegenstandsbereiches kann es sinnvoll sein, enger am Gegenstand orientierte Repräsentationsformen zu wählen.

Die Grundbausteine der Formeln werden TERME genannt.

Definition 4.3. *Term*

Ein TERM wird induktiv wie folgt definiert:

1. Jede Individuenvariable ist ein Term.
2. Jede Individuenkonstante ist ein Term.
3. Ist f eine n-stellige Funktion und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f(t_1,\ldots,t_n)$ ein Term.
4. Nur so gebildete Zeichenketten sind Terme.

Beispiele:

x, y	(Variable)
a_1, b_2, c_n	(Konstante)
$f(a), g(x, f(a,y), f(a, g(b, h(x,y)), f_1(z))$	(Funktionen)

Ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Funktionsterm, so heißen die Terme $t_1, \ldots, t_n$ die ARGUMENTE des Terms. Funktionen sind komplexe Repräsentationen von Individuen. Wofür eine Funktion steht, hängt von der Interpretation des Formalismus bezüglich eines bestimmten Gegenstandsbereiches ab.

Definition 4.4. *Primformel*

Ist p ein n-stelliges Prädikat und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $p(t_1, \ldots, t_n)$ eine PRIMFORMEL.[20]

Beipiele:

p, q	(0-stellige Prädikate)
$p_1(x), r(f(a))$	(1-stellige Prädikate)
$q_2(f(a,b), g(x), s(x, f(y))$	(2-stellige Prädikate)

[20] PRIMFORMELN werden auch ATOMARE FORMELN oder ATOME genannt.

Definition 4.5. *Argument*

Ist $p(t_1, \ldots, t_n)$ eine Primformel, so heißen die Terme $t_1, \ldots, t_n$ die ARGUMENTE der Primformel.

Prädikate unterscheiden sich von Funktionen dadurch, daß sie Wahrheitswerte repräsentieren. Alle komplexen FORMELN sind aus Primformeln zusammengesetzt:

Definition 4.6. *Formel*

Eine (WOHLGEFORMTE) FORMEL kann induktiv wie folgt definiert werden:[21]

1. Primformeln sind Formeln.
2. Ist F eine Formel so ist auch $\neg F$ eine Formel.
3. Sind F und G Formeln, so sind auch $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$ und $(F \Leftrightarrow G)$ Formeln. Für $(F \Rightarrow G)$ kann auch $(G \Leftarrow F)$ geschrieben werden.
4. Ist F eine Formel und x eine Variable, dann sind $(\bigwedge x\, F)$ und $(\bigvee x\, F)$ Formeln.

Beispiele

p, q	(0-stellige Primformeln)
$p(x), q(y), r(a)$	(1-stellige Primformeln)
$(\neg p(x))$	
$(p(a) \Rightarrow q(b)), (p(x) \Leftrightarrow q(x)), p(a) \wedge q(b)$	
$(\bigwedge x\, p(x)), (\bigvee y\, (p(y) \wedge q(y))$	

Die BINDUNGSBEREICHE der Quantoren ergeben sich aus der in der Definition aufgrund von (3.) verwendeten Klammerung.

Definition 4.7. *Skopus*

Der SKOPUS (Bindungsbereich) von $\bigwedge x$ (bzw. $\bigvee x$) in $\bigwedge x\, F$ (bzw. $\bigvee x\, F$) ist F.

Definition 4.8. *gebunden*

Eine Variable kommt in einer Formel GEBUNDEN vor, wenn sie unmittelbar nach einem Quantor steht (z.B. $\bigwedge x\, P$ oder $\bigvee x\, Q$) oder wenn sie im Skopus eines Quantors mit der gleichen Variablen vorkommt (z.B. $\bigwedge x\, p(x, y)$ bzw. $\bigvee y\, (p(y) \wedge q(y))$.

Definition 4.9. *frei*

Eine Variable die nicht gebunden ist ist frei.

Beispiele

In der Formel $\bigvee x\, p(x, y) \wedge q(x)$ kommt x die ersten beiden Male gebunden vor, das dritte Mal frei, denn der Skopus von $\bigvee x$ ist $p(x, y)$. In $\bigvee x\, (p(x, y) \wedge q(x))$ kommt x nur gebunden vor, weil der Skopus von $\bigvee x$ jetzt $p(x, y) \wedge q(x)$ ist.

---

[21] Änderungen im Vergleich zur Aussagenlogik sind eingerahmt.

Definition 4.10. *Geschlossene Formel*

Sind in einer Formel F alle Variablen durch Quantoren gebunden, gibt es also keine "freien" Variablen, dann wird F als GESCHLOSSENE FORMEL bezeichnet.

Es gelten folgende Bindungsregeln

- $\bigwedge$ und $\bigvee$ binden stärker als $\neg$
- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$

Definition 4.11. *Sprache erster Ordnung*

Eine Sprache erster Ordnung bei einem gegebenen Alphabet besteht aus der Menge der Formeln, die aus den Symbolen des Alphabets nach den Regeln der Syntax gebildet werden können.

Beispiele:

(4.45.) (a) $(\bigwedge x\ (\bigvee y\ (p(x,y) \Rightarrow \mathrm{q}(x))))$

(b) $(\neg(\bigvee x\ (p(x,a) \wedge q(f(x)))))$

(c) $(\bigwedge x\ (p(x,g(x)) \Leftarrow (q(x) \wedge (\neg r(x)))))$

sind Formeln. Unter Berücksichtigung der Vorrangskala können diese wie folgt vereinfacht werden:

(4.46.) (a) $\bigwedge x\ \bigvee y\ (p(x,y) \Rightarrow q(x))$

(b) $\neg \bigvee x(p(x,a) \wedge q(f(x)))$

(c) $\bigwedge x(p(x,g(x)) \Leftarrow q(x) \wedge \neg r(x))$

4.5. Die Semantik der Junktoren und Quantoren

4.5.1. JUNKTOREN

Die Junktoren ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) haben in der Prädikatenlogik die gleiche Semantik wie in der Aussagenlogik.

4.5.2. QUANTOREN

$\bigvee x\ p(x)$ bedeutet "es gibt ein x das $p(x)$ wahr macht", oder: $p(a_1) \vee p(a_2) \vee p(a_3) \vee \ldots \vee p(a_n)$

$\bigwedge x\ p(x)$ bedeutet "für alle x gilt, daß $p(x)$ wahr ist", oder: $p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots \wedge p(a_n)$.

$\bigwedge x\ (p(x) \wedge \neg q(x) \Rightarrow r(x,g(x)))$ heißt also "für alle x gilt, wenn $p(x)$ wahr ist und $q(x)$ falsch, dann ist $r(x, g(x))$ wahr."

4.5.3. ÄQUIVALENZEN

(1) $\bigwedge x\, F \equiv \neg \bigvee \neg F$

Ableitung:

$$\bigwedge x\, p(x)$$

$$p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \ldots \wedge p(a_n)$$

$$\neg(\neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \ldots \vee \neg p(a_n))$$

$$\neg \bigvee \neg p(x)$$

(2) $\bigvee x\, F \equiv \neg \bigwedge \neg F$

$$\bigvee x\, p(x)$$

$$p(a_1) \vee p(a_2) \vee \ldots \vee p(a_n)$$

$$\neg(\neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \ldots \wedge \neg p(a_n))$$

$$\neg \bigwedge x\, \neg p(x)$$

(3) $\bigwedge x \bigwedge \mathrm{y}\, F \equiv \bigwedge y \bigwedge x\, F$

(4) $\bigvee x \bigvee y\, F \equiv \bigvee y \bigvee x\, F$

(5) $\bigvee x \bigwedge y\, \mathrm{F} \Rightarrow \bigwedge y \bigvee x\, F$

(6) $\bigwedge x\, (F \wedge G) \equiv \bigwedge x\, F \wedge \bigwedge x\, G$

(7) $\bigvee x\, (F \vee G) \equiv \bigvee x\, F \vee \bigvee x\, G$

4.6. Logisches Schließen im Rahmen der Prädikatenlogik

Eine wesentliche Aufgabe auch der Prädikatenlogik ist die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten des logischen Schließens, wobei sich durch all- bzw. existenzquantifizierte Aussagen besondere Probleme ergeben. Für nicht-quantifizierte Aussagen gelten die Schlußregeln der Aussagenlogik weiterhin.

Das Schließen mit allquantifizierten Aussagen soll an einem linguistischen Beispiel kurz erläutert werden. Im übrigen soll die Thematik, mit Ausnahme des Resolutionsprinzips im nächsten Abschnitt, nicht weiter vertieft werden.

Als Beispiel wählen wir eine kontexfreie Phrasenstruktur-Grammatik als Beschreibung der grammatischen Sätze eines Fragments der englischen Sprache. Die Sätze sind Ketten von englischen Wörtern, die bestimmte Bedingungen erfüllen, z.B. die, daß sie nach festen Regeln aus Teilketten aufgebaut sind.

(4.47.) Gegeben sei folgende Grammatik:

$$\begin{array}{lcl} \text{Satz} & \rightarrow & \text{NP}^\frown\text{VP} \\ \text{NP} & \rightarrow & \text{Det}^\frown\text{N} \\ \text{NP} & \rightarrow & \text{Name} \\ \text{VP} & \rightarrow & \text{Vt}^\frown\text{NP} \end{array}$$

VP	→	Vi
Det	→	*the*
N	→	*boy*
N	→	*girl*
N	→	*ball*
Name	→	*John*
Name	→	*Mary*
Vt	→	*loves*
Vt	→	*kicked*
Vi	→	*jumped*

Die Regel $Satz \rightarrow NP^\frown VP$ ist etwa so zu interpretieren: Eine Wortkette z ist ein Satz gdw. sie sich so in zwei Teilketten x und y zerlegen läßt (d.h. $z = x^\frown y$), daß x eine Nominalphrase (NP) und y eine Verbalphrase (VP) ist. Prädikatenlogisch ausgedrück heißt dies:

$\bigwedge x \bigwedge y\ (Satz(x^\frown y) \Leftarrow NP(x) \wedge VP(y))$.

Wir können die Grammatik als ein Axiomensystem $\mathcal{G}$ auffassen, das aus einer Menge von Allaussagen und Einzelaussagen über Wortketten und Wörter besteht. Eine Wortkette k_i ist dann ein grammatischer Satz, wenn die Aussage $Satz(k_i)$ aus dem Axiomensystem ableitbar ist, d.h. wenn gilt $\mathcal{G} \vdash Satz(k_i)$.

Die prädikatenlogische Interpretation dieser Grammatik sieht wie folgt aus:

(4.48.) R1: $\bigwedge x \bigwedge y\ (NP(x) \wedge VP(y) \Rightarrow Satz(x^\frown y))$

R2: $\bigwedge x \bigwedge y\ (Det(x) \wedge N(y) \Rightarrow NP(x^\frown y))$

R3: $\bigwedge x\ (Name(x) \Rightarrow NP(x))$

R4: $\bigwedge x \bigwedge y\ (Vt(x) \wedge NP(y) \Rightarrow VP(x^\frown y))$

R5: $\bigwedge x\ (Vi(x) \Rightarrow VP(x))$

Lexikon:

Det(*the*)
N(*boy*)
N(*girl*)
N(*ball*)
Name(*John*)
Name(*Mary*)
Vt(*loves*)
Vt(*kicked*)
Vi(*jumped*)
Vi(*laughed*)

Es soll beispielsweise gezeigt werden, daß der Ausdruck *the girl laughed* ein grammatischer Satz ist. Dazu müssen wir mit den Regeln und dem Lexikon der Grammatik als Prämissen beweisen, daß die Ausage $Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$ aus der Grammatik $\mathcal{G}$ ableitbar ist, daß also gilt: $\mathcal{G} \vdash Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$

Beweis

(1)	$Det(the)$	Lexikon
(2)	$N(girl)$	Lexikon
(3)	$Det(the) \wedge N(girl)$	(1),(2) Konjunktion
(4)	$Det(the) \wedge N(girl) \Rightarrow NP(the^\frown girl)$	R2, Allbeseitigung
(5)	$NP(the^\frown girl)$	(3),(4) Modus Ponens
(6)	$Vi(laughed)$	Lexikon
(7)	$Vi(laughed) \Rightarrow VP(laughed)$	R5, Allbeseitigung
(8)	$VP(laughed)$	(6),(7) Modus Ponens
(9)	$NP(the^\frown girl) \wedge VP(laughed)$	(5),(8) Konjunktion
(10)	$NP(the^\frown girl) \wedge VP(laughed) \Rightarrow$ $Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$	R1
(11)	$Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$	(9),(10) Modus Ponens

4.7. Das Resolutionsprinzip in der Prädikatenlogik

Wir haben das Resolutionsprinzip bereits in der Aussagenlogik kennengelernt. Die Anwendung auf die Prädikatenlogik wird komplizierter durch die Existenz von quantifizierten Aussagen mit Individuenvariablen. Wir müssen für die Prädikatenlogik einige Begriffe neu definieren, den Algorithmus zur Übersetzung von Formeln in die Klauselform erweitern, und die Bedingungen für die Anwendung des Resolutionsschemas präzisieren.

4.7.1. KLAUSELFORM

Die Begriffe LITERAL und KLAUSEL müssen für die Prädikatenlogik neu definiert werden:

Definition 4.12. *Literal*

Ein LITERAL ist eine Primformel oder die Negation einer Primformel.

Beispiele für Literale sind $p(x)$, $q(f(a,b))$,$\neg v(x,y)$.

Definition 4.13. *Klausel*

Eine KLAUSEL ist eine Formel der Form $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_s(L_1 \vee \ldots \vee L_m)$ wobei jedes L_i ein Literal ist und $x_1,\ldots, x_s$ die einzigen Variablen sind, die in $L_1 \vee \ldots \vee L_m$ vorkommen.

Beispiele: Die folgenden Formeln sind Klauseln

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ (p(x,z) \vee \neg q(x,y) \vee \neg r(y,z))$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (\neg p(x,y) \vee r(f(x,y),a))$

Für Klauseln gibt es eine besondere Schreibweise, die in der Logikprogrammierung verwendet wird. Man erhält sie, indem man zunächst die Literale nach positiven und negativen Literalen sortiert, z.B.

(4.49.) $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_s(A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$

Sei (4.49) eine Klausel mit den Primformeln
$A_1,\ldots, A_k, B_1,\ldots,B_n$ und $x_1,\ldots,x_s$ als den einzigen darin vorkommenden Variablen, so kann dafür

(4.50.) $A_1, \ldots, A_k \Leftarrow B_1, \ldots, B_n$

geschrieben werden.
Dies ergibt sich aus der Äquivalenz von

(4.51.) $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_s (A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$

und

(4.52.) $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_s (A_1 \vee \ldots \vee A_k \Leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

und der Tatsache, daß alle vorkommenden Variablen allquantifiziert sind, so daß die Quantoren per Konvention weggelassen werden können.

Definition 4.14. *Programmklausel*

Eine PROGRAMMKLAUSEL ist eine Klausel der Form $A \Leftarrow B_1,\ldots,B_n$ und enthält genau ein positives Literal (A). A ist der KOPF und $B_1,\ldots,B_n$ der RUMPF der Programmklausel.

Definition 4.15. *Einheitsklausel*

Eine EINHEITSKLAUSEL ist eine Klausel der Form $A \Leftarrow$ d.h. eine Programmklausel mit leerem Rumpf.

Definition 4.16. *Logikprogramm*

Ein LOGIKPROGRAMM ist eine endliche Menge von Programmklauseln.

Definition 4.17. *Definition*

In einem Logikprogramm ist die Menge aller Programmklauseln mit dem gleichen Prädikat p im Kopf die DEFINITION von p.

Definition 4.18. *Zielklausel*

Eine ZIELKLAUSEL ist eine Klausel der Form $\Leftarrow B_1,\ldots,B_n$ d.h. eine Klausel ohne Kopf. Jedes $B_i (i=1,\ldots, n)$ ist ein TEILZIEL der Zielklausel.

Seien $y_1,\ldots,y_r$ die Variablen der Zielklausel $\Leftarrow B_1,\ldots,B_n$, dann ist dies eine Abkürzung für $\bigwedge y_1 \ldots \bigwedge y_r (\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_n)$ oder, äquivalent dazu, $\neg \bigvee y_1 \ldots \bigvee y_r (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$

Definition 4.19. *Leere Klausel*

Die LEERE KLAUSEL $\square$, ist die Klausel ohne Kopf und Rumpf. Sie ist als Kontradiktion zu verstehen.

Definition 4.20. *Horn Klausel*

Eine HORN KLAUSEL ist eine Klausel, die entweder eine Programmklausel oder eine Zielklausel ist.

4.7.2. UMWANDLUNG VON FORMELN IN KLAUSELFORM

Bei der Umwandlung von Formeln in Klauselform gelten die gleichen Regeln wie für die Aussagenlogik, es kommen jedoch neue Regeln hinzu:

1. Beseitigung des Bikonditionals (Bikond):
   $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
2. Beseitigung des Konditionals (Kond):
   $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
3. Skopus der Negation verringern (De Morgan):
   $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
   $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
   $\neg \bigwedge x\, P(x) \equiv \bigvee x\, \neg P(x)$
   $\neg \bigvee x\, P(x) \equiv \bigwedge x\, \neg P(x)$
4. Doppelte Negation beseitigen (Neg):
   $\neg\neg P \equiv P$
5. Variablen umbenennen, so daß jeder Quantor eindeutig eine Variable bindet. Da Variablen nur Platzhalter sind, wird dadurch der Wahrheitswert der Formel nicht beeinflußt. Zum Beispiel, die Formel
   $\bigwedge x\, P(x) \vee \bigwedge x\, Q(x)$
   würde dadurch zu
   $\bigwedge x\, P(x) \vee \bigwedge y\, Q(y)$
   umgewandelt werden. Dies dient der Vorbereitung für den nächsten Schritt
6. Bringe die Formel in die PRÄNEXE NORMALFORM, indem alle Quantoren an den Anfang der Formel gestellt werden, ohne jedoch ihre relative Reihenfolge zu verändern. Dies ist möglich, weil es durch den vorherigen Schritt keine Namenskonflikte geben kann. Eine Pränexe Normalform besteht aus einem PRÄFIX aus Quantoren gefolgt von einer quantorenfreien MATRIX.
7. Eliminiere die Existenzquantoren. Dies ist ein etwas schwierig nachzuvollziehender Schritt. Eine Formel wie z.B. $\bigvee x\, Bundeskanzler(x)$, die eine existenzquantifizierte Variable enthält, behauptet, daß es irgendein Indivduum gibt, das für x eingesetzt eine wahre Aussage ergibt. Wir wissen nicht, wer dieses Individuum ist, sondern nur, daß es existieren muß. Wir können diesem Individuum einen vorläufigen Namen geben — sagen wir s_1 — und nehmen an, daß es für x eingesetzt die Existenzaussage wahr macht. Die Formel $\bigvee x\, Bundeskanzler(x)$ kann damit in $Bundeskanzler(s_1)$ transformiert werden. Man bezeichnet einen solchen "vorläufigen" Namen als SKOLEMKONSTANTE. Die Beseitigung von Existenzquantoren durch Skolemkonstante bzw. Skolemfunktionen (s.u.) wird SKOLEMISIERUNG genannt.

   Betrachten wir nun die Aussage "Jeder hat einen Vater": $\bigwedge x \bigvee y\, Vater(y,x)$. In diesem Falle steht der Existenzquantor im Skopus eines Allquantors. Es kann daher sein, daß der Wert von y, der das Prädikat erfüllen würde, in irgendeiner Weise vom Wert von x abhängig ist. In diesem Fall geht man davon aus, daß es eine FUNKTION gibt, die in Abhängigkeit von x den Wert von y bestimmt: $y = s_2(x)$. Man nennt eine solche Funktion

eine SKOLEMFUNKTION.[22] Unsere Beispielformel kann damit in $\bigwedge x\ Vater(s_2(x),x)$ transformiert werden.

8. Da jetzt alle noch verbleibenden Variablen allquantifiziert sind, kann das Präfix per Konvention weggelassen werden.
9. Konvertiere die verbleibende Matrix in eine Konjunktion von Klauseln
   a) Konjunktion nach außen ziehen (Distributivgesetz der Disjunktion: Distrib): $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   b) Gegebenenfalls Anwendung von Kommutativ- und Assoziativgesetzen (Komm, Assoz):
   c) Gegebenenfalls Vereinfachungen (Vereinf):
      i) $P \wedge P \equiv P$
      ii) $P \vee P \equiv P$
      iii) $P \Rightarrow P \equiv P$
10. Eine Konjunktion von Klauseln wird zu einer Klauselmenge zusammengefaßt. Falls mehrere Formeln zur Beschreibung des gleichen Sachverhalts dienen, werden sie nach der Konversion zu einer Klauselmenge zusammengefaßt.
11. Gegebenenfalls Umbenennung der Variablen in der Klauselmenge nach dem vorigen Schritt, so daß keine zwei Klauseln die gleichen Variablen enthalten.

Beispiel:

Schritt	**Formel**	**Kommentar**
0	$\bigwedge x \left[\bigwedge y\ P(x,y) \Rightarrow \neg \bigwedge y\ (Q(x,y) \Rightarrow R(x,y))\right]$	Ausgangsformel
1	$\bigwedge x \left[\neg \bigwedge y\ P(x,y) \vee \neg \bigwedge y\ (\neg Q(x,y) \vee R(x,y))\right]$	Konditional
2	$\bigwedge x \left[\bigvee y\ \neg P(x,y) \vee \bigvee y\ (Q(x,y) \wedge \neg R(x,y))\right]$	Skopus der Negation
3	$\bigwedge x \left[\bigvee y\ \neg P(x,y) \vee \bigvee z\ (Q(x,z) \wedge \neg R(x,z))\right]$	Variablen umbenennen
4	$\bigwedge x \left[\neg P(x,s_1(x)) \vee (Q(x,s_2(x)) \wedge \neg R(x,s_2(x)))\right]$	Skolemisierung
5	$\neg P(x,s_1(x)) \vee (Q(x, s_2(x)) \wedge \neg R(x, s_2(x)))$	Präfix weglassen
6	$(\neg P(x,s_1(x)) \vee Q(x, s_2(x)) \wedge$ $(\neg P(x,s_1(x)) \vee \neg R(x, s_2(x)))$	Distribution
7	$\{\neg P(x,s_1(x)) \vee Q(x, s_2(x)),$ $\neg P(x,s_1(x)) \vee \neg R(x, s_2(x))\}$	Klauselmenge
8	$\{\neg P(x_1,s_1(x_1)) \vee Q(x_1,s_2(x_1)),$ $\neg P(x_2,s_1(x_2)) \vee \neg R(x_2, s_2(x_2))\}$	Variable umbenennen

[22] Benannt nach einem norwegischen Mathematiker namens Skolem. Skolemkonstante sind Skolemfunktionen mit Null Argumenten.

Als weiterer Schritt wäre noch die Umformung zur Klauselnotation möglich gewesen, z.B. $Q(x_1,s_2(x_1)) \Leftarrow P(x_1,s_1(x_1))$.
Die Umformung der Grammatik (4.48) in die Klauselform ist relativ einfach. Beispiel (R1):

(4.53.) $\bigwedge x \bigwedge y\ (NP(x) \wedge VP(y) \Rightarrow Satz(x \frown y))$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (\neg(NP(x) \wedge VP(y)) \vee Satz(x \frown y)$

$\bigwedge x \bigwedge y\ (\neg NP(x) \vee \neg VP(y) \vee Satz(x \frown y)$

$\neg NP(x) \vee \neg VP(y) \vee Satz(x \frown y)$

$Satz(x \frown y) \Leftarrow NP(x), VP(y)$

(4.54.) R1: $\neg\ NP(x_1) \vee \neg\ VP(y_1) \vee Satz(x_1 \frown y_1)$
R2: $\neg Det(x_2) \vee \neg N(y_2) \vee NP(x_2 \frown y_2)$
R3: $\neg Name(x_3) \vee NP(x_3)$
R4: $\neg Vt(x_4) \vee \neg\ NP(y_4) \vee VP(x_4 \frown y_4)$
R5: $\neg Vi(x_5) \vee VP(x_5)$
Lexikon:
Det(the)
N(boy)
N(girl)
N(ball)
Name(John)
Name(Mary)
Vt(loves)
Vt(kicked)
Vi(jumped)
Vi(laughed)

In Klauselnotation

(4.55.) R1: $Satz(x_1 \frown y_1) \Leftarrow NP(x_1), VP(y_1)$
R2: $NP(x_2 \frown y_2) \Leftarrow Det(x_2), N(y_2)$
R3: $NP(x_2) \Leftarrow Name(x_3)$
R4: $VP(x_4 \frown y_4) \Leftarrow Vt(x_4), NP(y_4)$
R5: $VP(x_5) \Leftarrow Vi(x_5)$
Lexikon:
Det(*the*)⇐
N(*boy*)⇐
N(*girl*)⇐
N(*ball*)⇐
Name(*John*)⇐
Name(*Mary*)⇐
Vt(*loves*)⇐
Vt(*kicked*)⇐
Vi(*jumped*)⇐
Vi(*laughed*)⇐

4.7.3. SUBSTITUTION UND UNIFIKATION

Für die Anwendung des Resolutionsschemas auf zwei Klauseln ist Voraussetzung, daß ein Literal in einer Klausel positiv, in der anderen negativ vorkommt. In Rahmen der Prädikatenlogik entsteht ein Problem dadurch, daß Formeln erst durch die Substitution von Variablen verlgeichbar werden. Nehmen wir beispielsweise das folgende Paar

(4.56.) $\neg\ Vi(x_5) \vee VP(x_5)$
$Vi(laughed)$

Das Resolutionsschema kann hier erst angewandt werden, wenn man die Variable x_5 durch *laughed* substituiert.

(4.57.) $\neg Vi(laughed) \vee VP(laughed)$
$Vi(laughed)$
$VP(laughed)$ Resolvente

Das Verfahren, durch das festgestellt wird, ob zwei Ausdrücke durch geeignete SUBSTITUTIONEN für ihre Variablen gleich gemacht werden können, nennt man UNIFIKATION. Die Möglichkeit der Unifikation ist eine Grundvoraussetzung für die Anwendung des Resolutionsprinzips in der Prädikatenlogik.

Definition 4.21. *Substitution*

Eine Substitution θ ist eine endliche Menge der Form $\{v_1/t_1, \ldots, v_n/t_n\}$, wobei jedes v_i eine Variable und jedes t_i ein von v_i verschiedener Term ist und die Variablen $v_1, \ldots, v_n$ verschieden sind. Man sagt die v_i werden durch die t_i substituiert bzw. an sie gebunden. Jedes Element v_i/t_i ist eine BINDUNG für *vi*.

Definition 4.22. *Ausdruck*

Ein AUSDRUCK ist entweder ein Term oder eine Formel. Ein EINFACHER AUSDRUCK ist entweder ein Term oder eine Primformel.

Definition 4.23. *Substitutionsinstanz*

Sei φ ein Ausdruck und $\theta=\{v_1/t_1, \ldots, v_n/t_n\}$ eine Substitution. Die Anwendung von θ auf φ, geschrieben $\varphi\theta$, ist der Ausdruck, der entsteht, wenn in φ die v_i gleichzeitig durch die t_i ersetzt werden (SUBSTITUTIONSINSTANZ). Man sagt auch, die Variablen v_i in φ werden zu den Werten t_i INSTANTIIERT.

Beispiel: $\theta = \{x_5/laughed\}$, $\varphi = \neg Vi(x_5) \vee VP(x_5)$, und $\varphi\theta = \neg Vi(laughed) \vee VP(laughed)$

Definition 4.24. *Komposition*

Seien $\theta = \{u_1/s_1,\ldots,u_m/s_m\}$ und $\sigma = \{v_1/t_1, \ldots, v_n/t_n\}$ Substitutionen. Die KOMPOSITION (Hintereinanderausführung) $\theta\sigma$ von θ und σ ist die Substitution, die man aus der Menge

$$\{u_1/s_1\sigma,\ldots,u_m/s_m\sigma,\ v_1/t_1,\ldots,v_n/t_n\}$$

erhält, indem man alle Bindungen $u_i/s_i\sigma$ entfernt, für die $u_i = s_i\sigma$ und alle Bindungen v_j/t_j, für die $v_j \in \{u_1, \ldots, u_m\}$

Beispiel:

Sei $\theta = \{x/f(y), y/z\}$ und $\sigma=\{x/a, y/b, z/y\}$; $x/f(y)$ entspricht u_1/s_1, y/z entspricht u_2/s_2.

Dann erhält man $\theta\sigma$ aus $\{x/f(y)\sigma, z/y\sigma\} \cup \sigma$ wie folgt:

$$\underbrace{\{x/f(y)\{x/a,\ \mathbf{y/b},\ z/y\}}_{x/f(b)},\quad \underbrace{y/z\{x/a,\ y/b,\ \mathbf{z/y}\}}_{\underline{y/y}},\qquad \underline{x/a,\ y/b},\ z/y\}$$

Die unterstrichenen Terme fallen weg, also gilt: $\theta\sigma = \{x/f(b),\ z/y\}$

Definition 4.25. *leere Substitution*

Die LEERE SUBSTITUTION ist durch die leere Menge { } gegeben und wird mit ε bezeichnet. Ist φ ein Ausdruck, so gilt $\varphi\varepsilon=\varphi$.

Definition 4.26. *Varianten*

Seien φ und ψ Ausdrücke. φ und ψ sind VARIANTEN, wenn es zwei Substitution θ und σ gibt derart, daß $\varphi=\psi\theta$ und $\psi=\varphi\sigma$. Man sagt φ sei eine Variante von ψ und umgekehrt.

Beispiel: $p(f(x,y), g(z),a)$ ist eine Variante von $p(f(y,x), g(u),a)$. Dabei ist $\theta=\{y/x,\ x/y,\ u/z\}$ und $\sigma=\{x/y,\ y/x,\ z/u\}$.

Varianten lassen sich durch Umbenennung der Variablen in einander überführen.

Von besonderem Interesse sind Substitutionen, die eine Menge von Ausdrücken gleich machen (UNIFIZIEREN).

Definition 4.27. *unifizierbar*

Eine Menge von Ausdrücken $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ heißt UNIFIZIERBAR, wenn es eine Substitution θ gibt, welche alle Ausdrücke gleich macht, d.h. $\varphi_1\theta=\ldots=\varphi_n\theta$.

Beispiel: die Substitution $\{x/A,\ y/B,\ z/C\}$ unifiziert die Ausdrücke $P(A,y,z)$ und $P(x,B,z)$ mit dem Ergebnis $P(A,B,C)$

$P(A,y,z)\{x/A,\ y/B,\ z/C\}=P(A,B,C)=P(x,B,z)\{x/A,y/B,\ z/C\}$

Definition 4.28. *Unifikator*

Eine Substitution θ heißt UNIFIKATOR für eine Menge von Ausdrücken $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ falls diese dadurch unifiziert werden, d.h. wenn gilt $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\theta=\{\psi\}$ wobei $\psi=\varphi_1\theta=\ldots=\varphi_n\theta$.

Obwohl die Substitution $\{x/A,\ y/B,\ z/C\}$ die beiden Ausdrücke $P(A,y,z)$ und $P(x,B,z)$ unifiziert, ist sie nicht der einzige Unifikator. Da die Variable z in beiden Ausdrücken an der gleichen Argumentstelle vorkommt, muß sie nicht substituiert werden, um die Gleichheit zu erreichen. Mit der Substitution $\{x/A,\ y/B\}$ wären die Ausdrücke ebenfalls unifizierbar gewesen.

$P(A,y,z)\{x/A,\ y/B\}=P(A,B,z)=P(x,B,z)\{x/A,y/B\}$

Der Unifikator $\{x/A,\ y/B\}$ ist *allgemeiner* als der Unifikator $\{x/A,\ y/B,\ z/C\}$. Intuitiv ist ein Unifikator umso allgemeiner, je weniger Variable bei der Unifikation substituiert werden. Die Substitution $\{z/F(w)\}$ ist allgemeiner als $\{z/F(C)\}$. Eine Substitution θ ist allgemeiner als eine Substitution σ gdw. es eine andere Substitution δ gibt derart, daß $\theta\delta=\sigma$. Im Beispiel: $\{z/F(w)\}\{w/C\}=\{z/F(C)\}$.

Definition 4.29. *allgemeinster Unifikator*

Sei S eine endliche Menge von einfachen Ausdrücken. Ein Unifikator θ für S heißt ALLGEMEINSTER UNIFIKATOR für S (engl. *most general unifier (mgu)*), wenn es für jeden weiteren Unifikator σ von S eine Substitution γ gibt derart, daß $\sigma=\theta\gamma$.

Beispiel: Die Ausdrucksmenge $\{p(f(x),z),\ p(y,a)\}$ ist unifizierbar beispielsweise durch den Unifikator $\sigma=\{y/f(a),x/a,z/a\}$. $p(f(x),z)\sigma=p(f(a),a)=p(y,a)\sigma$. Ein allgemeinster Unifikator ist $\theta=\{y/f(x),z/a\}$. Es gilt $\sigma=\theta\{x/a\}$.

Unifikationsalgorithmus

Eingabe: zwei einfache Ausdrücke φ und ψ

Ausgabe: der allgemeinste Unifikator von φ und ψ

Sind φ und ψ gleiche Konstanten oder gleiche Variable, so sind sie mit der leeren Substitution { } unifizierbar. Sind sie verschiedene Konstante schlägt die Unifikation fehl.

Ist φ eine Variable, die nicht in ψ vorkommt, so sind φ und ψ mit der Substitution $\{\varphi/\psi\}$ unifizierbar. Kommt φ in ψ vor, so schlägt die Unifikation fehl.

Sind φ und ψ Funktionen mit gleichem Funktor und gleicher Stelligkeit (Argumentzahl) ($f(s_1,\ldots, s_n)$ bzw. $f(t_1,\ldots,t_n)$) so sind sie unifizierbar, wenn jedes Argumentpaar t_i, s_i, i=1 … n unifizierbar ist. Andernfalls schlägt die Unifikation fehl.

Definition 4.30. *Unterschiedsmenge*

> Sei A eine endliche Menge von einfachen Ausdrücken. Die UNTERSCHIEDSMENGE (engl. *disagreement set*) von A ist wie folgt definiert. Ermittle die am weitesten links stehende Symbolposition an der nicht alle Ausdrücke in A das gleiche Symbol haben und extrahiere aus jedem Ausdruck in A den Teilausdruck, der an dieser Symbolposition beginnt. Die Menge all dieser Teilausdrücke ist die Unterschiedsmenge.

Beispiel: Sie $A=\{p(f(x), h(y), a), p(f(x), z, a), p(f(x), h(y), b)\}$. Dann ist die Unterschiedsmenge $\{h(y), z\}$.

Ein Unifikationsalgorithmus kann auf dieser Grundlage präziser und einfacher wie folgt angegeben werden (A sei eine endliche Menge von einfachen Ausdrücken):

UNIFIKATIONSALGORITHMUS

1. Setze k=0 und $\theta_0=\varepsilon$
2. Wenn $A\theta_k$ (d.h. die Anwendung von θ_k auf A) eine Einermenge ist (nur aus einem Element besteht), dann halt; θ_k ist der allgemeinste Unifikator von A. Andernfalls ermittle die Unterschiedsmenge D_k von $A\theta_k$.
3. Gibt es ein v und ein t in D_k, so daß v eine Varialbe ist, die in t nicht vorkommt, dann setze $\theta_{k+1} = \theta_k\{v/t\}$, erhöhe k um 1 und gehe zu 2. Andernfalls halt; A ist nicht unifizierbar.
4. Beispiel: Sei $A=\{p(a\ , x, h(g(z))), p(z, h(y), h(y))\}$
   - (a) $\theta_0=\varepsilon$
   - (b) $D_0=\{a,z\}$, $\theta_1=\{z/a\}$, und $A\theta_1=\{p(a, x, h(g(a))), p(a, h(y), h(y))\}$.
   - (c) $D_1=\{x, h(y)\}$, $\theta_2=\{z/a, x/h(y)\}$ und $A\theta_2=\{p(a,h(y), h(g(a))), p(a,h(y), h(y))\}$.
   - (d) $D_2=\{g(a), y\}$, $\theta_3=\{z/a, x/h(g(a)), y/g(a)\}$ und $A\theta_3=\{p(a,h(g(a)),h(g(a)))\}$. Also ist A unifizierbar und θ_3 ist ein allgemeinster Unifikator.

4.8. Anwendungsbeispiel

Zur besseren Vergleichbarkeit soll das gleiche Beispiel wie in Abschnitt 3. verwendet werden: *the girl laughed*. Es soll also nach dem Resolutionsverfahren bewiesen werden, daß die Aussage $Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$ wahr ist. Wir legen dafür die gleiche Grammatik zugrunde, allerdings in Klauselnotation. Der Bequemlichkeit halber soll sie hier noch einmal wiederholt werden:

(4.58.) **PS-Grammatik in Klauselnotation**

R1: $Satz(x_1{}^\frown y_1) \Leftarrow NP(x_1),\ VP(y_1)$

R2: $NP(x_2{}^\frown y_2) \Leftarrow Det(x_2),\ N(y_2)$

R3: $NP(x_3) \Leftarrow Name(x_3)$

R4: $VP(x_4{}^\frown y_4) \Leftarrow Vt(x_4),\ NP(y_4)$

R5: $VP(x_5) \Leftarrow Vi(x_5)$

Lexikon:

$Det(the) \Leftarrow$

$N(boy) \Leftarrow$

$N(girl) \Leftarrow$

$N(ball) \Leftarrow$

$Name(John) \Leftarrow$

$Name(Mary) \Leftarrow$

$Vt(loves) \Leftarrow$

$Vt(kicked) \Leftarrow$

$Vi(jumped) \Leftarrow\ Vi(laughed) \Leftarrow$

Damit die Resolution durchgeführt werden kann, ist erforderlich, daß in zwei verschiedenen Klauseln ein Literal einmal positiv und einmal negativ vorkommt. Hier zeigt sich der syntaktische Vorteil von Programmklauseln, insofern nur der Kopf ein positives Literal sein kann, während der Rumpf nur aus negativen Literalen besteht. Zur Beseitigung eines Literals aus dem Rumpf einer Klausel müssen wir versuchen, dieses mit dem Kopf einer Programmklausel zu unifizieren.

Die Prämissen sind die Programmklauseln (einschließlich Einheitsklauseln) der Grammatik. Gemäß dem Verfahren des indirekten Beweises nehmen wir zunächst die Negation der zu beweisende Aussage zu den Prämissen hinzu.

(4.59.) $\neg Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$

Es handelt sich um ein negatives Literal, so daß wir die Klauselnotation

(4.60.) $\Leftarrow Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$,

d.h. eine Zielklausel, erhalten. Im folgenden Beweis steht Z für Zielklausel, P für Programmklausel, U für Unifikator und R für Resolvente. Die Resolvente ist jeweils die Zielklausel für den nächsten Schritt:

Z:		$\Leftarrow Satz(the^\frown girl^\frown laughed)$
P:	$Satz(x_1{}^\frown y_1)$	$\Leftarrow NP(x_1),\ VP(y_1)$
U:	$\{x_1/the^\frown girl,\ y_1/laughed\}$	
R:		$\Leftarrow NP(the^\frown girl),\ VP(laughed)$
Z = R:		
P:	$NP(x_4{}^\frown y_4)$	$\Leftarrow Det(x_4),\ N(y_4)$
U:	$\{x_4/the,\ y_4/girl\}$	
R:		$\Leftarrow Det(the),\ N(girl),\ VP(laughed)$
Z = R:		
P:	$Det(the)$	$\Leftarrow$
U:	ε	
R:		$\Leftarrow N(girl),\ VP(laughed)$
Z = R:		
P:	$N(girl)$	$\Leftarrow$
U:	ε	
R:		$\Leftarrow VP(laughed)$
Z = R:		
P:	$VP(x_5)$	$\Leftarrow Vi(x_5)$
U:	$\{x_5/laughed\}$	
R:		$\Leftarrow Vi(laughed)$
Z = R:		
P:	$Vi(laughed)$	$\Leftarrow$
U:	ε	
R:		$\square$

Im folgenden Beispiel geht es um die zunächst merkwürdig erscheinende Frage, ob es überhaupt Ketten gibt, die nach der Grammatik zugelassen sind. Wir gehen aus von der Behauptung $\bigvee x\ Satz(x)$. Die Negation dieser Behauptung, $\neg\bigvee x\ Satz(x)$, wird als zusätzliche Prämisse übernommen. Sie muß zunächst unter Verwendung der Äquivalenz $\neg\bigvee x\ P(x) \equiv \bigwedge x \neg P(x)$ in Klauselform übersetzt werden. Das Ergebnis, $\bigwedge x\ \neg Satz(x)$, hat die Klauselform $\Leftarrow Satz(x)$. Der Beweis sieht dann wie folgt aus:

Z:		$\Leftarrow Satz(x)$
P:	$Satz(x_1{}^\frown y_1)$	$\Leftarrow NP(x_1),\ VP(y_1)$
U:	$\{x/x_1{}^\frown y_1\}$	
R:		$\Leftarrow NP(x_1),\ VP(y_1)$
Z = R:		
P:	$NP(x_3)$	$\Leftarrow Name(x_3)$
U:	$\{x_1/x_3\}$	
R:		$\Leftarrow Name(x_3),\ VP(y_1)$
Z = R:		$\Leftarrow Name(x_3),\ VP(y_1)$
P:	$Name(Mary)$	$\Leftarrow$
U:	$\{x_3/Mary\}$	
R:		$\Leftarrow VP(y_1)$
Z = R:		
P:	$VP(x_5)$	$\Leftarrow Vi(x_5)$
U:	$\{y_1/x_5\}$	
R:		$\Leftarrow Vi(x_5)$
Z = R:		
P:	$Vi(jumped)$	$\Leftarrow$
U:	$\{x_5/jumped\}$	
R:		$\square$

Von Interesse ist hier primär nicht die Tatsache, daß die Behauptung $\bigvee x\ Satz(x)$ beweisbar ist, sondern daß auch eine Instanz für x geliefert wird, die man erhält, wenn man die Komposition der Unifikatoren bildet:

(4.61.) Komposition der Unifikatoren

$\underline{\{x/x_1 \frown y_1\}}\ \underline{\{x_1/x_3\}}\ \{x_3/Mary\}\ \{y_1/x_5\}\ \{x_5/jumped\}$

$\underline{\{x/x_3 \frown y_1\}}\ \underline{\{x_3/Mary\}}\ \{y_1/x_5\}\ \{x_5/jumped\}$

$\underline{\{x/Mary \frown y_1\}}\ \underline{\{y_1/x_5\}}\ \{x_5/jumped\}$

$\underline{\{x/Mary \frown x_5\},\ x_5/jumped\}}$

$\{x/Mary \frown jumped\}$

Mit anderen Worten, im Zuge des Beweises werden durch Unifikation Variablen gebunden und damit Sätze GENERIERT. Jeder alternative Beweisweg generiert einen anderen Satz.

4.9. Definite Clause Grammar (DCG)

4.9.1. VERKETTUNG

Wir waren bisher davon ausgegangen, daß in einer Regel wie

(4.62.) $Satz(x \frown y) \Leftarrow NP(x),\ VP(y)$

eine Verkettungsoperation definiert ist, die Paare von Ketten auf Ketten abbildet ($\mathcal{K}\times\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ die Menge aller möglichen Ketten ist) und ein funktionales Argument wie $x \frown y$ entsprechend ausgewertet wird. Dies ist jedoch insbesondere in Prolog nicht gegeben.[23]

Es gibt aber eine Möglichkeit, die Verkettung ausschließlich über die Unifikation von Termen zu beschreiben. Dazu benötigen wir zunächst eine präzise Definition des Begriffs KETTE:

Definition 4.31. *Kette*

Eine KETTE kann induktiv wie folgt definiert werden

1. Der Term *nil* ist eine Kette, die LEERE Kette.
2. Ist R eine Kette und K ein Term, dann ist $K.R$ eine Kette. K ist der KOPF und R der RUMPF der Kette.

Ein Ausdruck wie *the girl laughed* wird damit als *the.girl.laughed.nil* notiert.

Die Behandlung der Verkettung (bzw. umgekehrt der Zerlegung von Ketten in Teilketten) beruht auf folgender Überlegung: Ein Kette k_0 enthält am Anfang einen Satz mit einem Rest k (d.h. $Satz(k_0–k)$), wenn es eine Anfangskette $k_0–k_1$ gibt, für die gilt $NP(k_0–k_1)$ und die Restkette k_1 eine Kette $k_1–k$ mit $VP(k_1–k)$ enthält. Die gesamte Kette k_0 ist ein Satz, wenn die Restkette k leer ist. Die leere Kette soll mit der Konstante *nil* bezeichnet werden.

<table>
<tr><td colspan="3">k_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$k_0–k$</td><td>k</td></tr>
<tr><td>$k_0–k_1$</td><td colspan="2">k_1</td></tr>
<tr><td></td><td>$k_1–k$</td><td>k</td></tr>
</table>

[23] In Prolog sind Funktionen im prädikatenlogischen Sinne bloße syntaktische Strukturen, die nicht ausgewertet werden.

<table>
<tr><td colspan="3">k_0
the.girl.laughed.nil</td></tr>
<tr><td colspan="2">k_0–k
the.girl.laughed</td><td>k
nil</td></tr>
<tr><td>k_0–k_1
the.girl</td><td colspan="2">k_1
laughed.nil</td></tr>
<tr><td></td><td>k_1–k
laughed</td><td>k
nil</td></tr>
</table>

Der entscheidende Punkt ist dabei, daß im Falle eines terminalen Symbols *t* gilt: k_0=*t.k*. Die Zerlegung einer Kette in Teilketten wird damit zurückgeführt auf die Zerlegung der Kette in das erste terminale Element und die Restkette. Die *Differenzketten*[24] wie k_0–*k* werden im folgenden durch zwei Argumente dargestellt, so daß die erste Syntaxregel wie folgt formuliert werden kann:

(4.63.) $Satz(k_0,k) \Leftarrow NP(k_0,k_1),\ VP(k_1,k)$

Lexikonregeln hätten die Form $LK(k_0,k) \Leftarrow$, wobei jedoch gilt k_0=*Wort.k*, z.B.:

(4.64.) $Det(the.k,k) \Leftarrow$

Unsere PS-Grammatik erhält damit die folgende Form, wobei die Variablen für die spätere Anwendung bereits durch Indizes umbenannt worden sind:

(4.65.) **PS-Grammatik in Klauselnotation mit Differenzketten**

R1: $Satz(x_1, z_1) \Leftarrow NP(x_1,y_1),\ VP(y_1,z_1)$
R2: $NP(x_2, z_2) \Leftarrow Det(x_2,y_2),\ N(y_2,z_2)$
R3: $NP(x_3,z_3) \Leftarrow Name(x_3,z_3)$
R4: $VP(x_4, z_4) \Leftarrow Vt(x_4,y_4),\ NP(y_4,z_4)$
R5: $VP(x_5,z_5) \Leftarrow Vi(x_5,z_5)$

Lexikon:

$Det(the.z_6,z_6) \Leftarrow$
$N(boy.z_7,z_7) \Leftarrow$
$N(girl.z_8,z_8) \Leftarrow$
$N(ball.z_9,z_9) \Leftarrow$
$Name(John.z_{10},z_{10}) \Leftarrow$
$Name(Mary.z_{11},z_{11}) \Leftarrow$
$Vt(loves.z_{12},z_{12}) \Leftarrow$
$Vt(kicked.z_{13},z_{13}) \Leftarrow$
$Vi(jumped.z_{14},z_{14}) \Leftarrow$
$Vi(laughed.z_{15},z_{15}) \Leftarrow$

Die der Behauptung "*John kicked the ball* ist ein Satz" entsprechende Zielklausel hat jetzt die Form

(4.66.) $\Leftarrow Satz(John.kicked.the.ball.nil,nil)$

Der Beweis erhält nunmehr die in (4.67.) gezeigte Form.

[24] In Prolog werden Ketten als Listen dargestellt. Man spricht dort entsprechend von Differenzlisten.

(4.67.)

Z:	$\Leftarrow Satz(John.kicked.the.ball.nil,nil)$	
P:	$Satz(x_1,z_1)$	$\Leftarrow NP(x_1,y_1),\ VP(y_1,z_1)$
U:	$\{x_1/John.kicked.the.ball.nil, z_1/nil\}$	
R:		$\Leftarrow NP(John.kicked.the.ball.nil,y_1), VP(y_1,nil)$
Z = R:		
P:	$NP(x_3,\ z_3)$	$\Leftarrow Name(x_3,z_3)$
U:	$\{x_3/John.kicked.the.ball.nil,\ z_3/y_1\}$	
R:		$\Leftarrow Name(John.kicked.the.ball.nil,y_1),\ VP(y_1,nil)$
Z = R:		
P:	$Name(John.z_{10},z_{10})$	$\Leftarrow$
U:	$\{z_{10}/kicked.the.ball.nil,\ y_1/kicked.the.ball.nil\}$	
R:		$\Leftarrow VP(kicked.the.ball.nil,nil)$
Z = R:		
P:	$VP(x_4,\ z_4)$	$\Leftarrow Vt(x_4,y_4),NP(y_4,z_4)$
U:	$\{x_4/kicked.the.ball.nil,\ z_4/nil\}$	
R:		$\Leftarrow Vt(kicked.the.ball.nil,y_4),\ NP(y_4,nil)$
Z = R:		
P:	$Vt(kicked.z_{13},z_{13})$	$\Leftarrow$
U:	$\{z_{13}/the.ball.nil,\ y_4/the.ball.nil\}$	
R:		$\Leftarrow NP(the.ball.nil,nil)$
Z = R:		
P:	$NP(x_2,z_2)$	$\Leftarrow Det(x_2,y_2),N(y_2,z2)$
U:	$\{x_2/the.ball.nil,\ z_2/nil\}$	
R:		$\Leftarrow Det(the.ball.nil,\ y_2),\ N(y_2,\ nil)$
Z = R:		
P:	$Det(the.z_6,z_6)$	$\Leftarrow$
U:	$\{z_6/ball.nil,y_2/ball.nil\}$	
R:		$\Leftarrow N(ball.nil,nil)$
Z = R:		
P:	$N(ball.z_9,z_9)$	$\Leftarrow$
U:	$\{z_9/nil\}$	
R:		$\square$

4.9.2. DER DCG-FORMALISMUS

Nachdem nun der Beweismechanismus der hier diskutierten Form der Logikgrammatik (hoffentlich) deutlich geworden ist, können wir dazu übergehen, diesen Mechanismus vor dem Grammatiker zu "verstecken".

Wir haben gesehen, daß eine PS-REGEL wie $Satz \rightarrow NP\ VP$ in der Klauselnotation der Logikgrammatik als $Satz(k_0,k) \Leftarrow NP(k_0,k_1),\ VP(k_1,k)$ wiedergegeben wird. LEXIKONREGELN, die nichtterminale lexikalische Kategorien zu terminalen Symbolen expandieren, werden zu

Einheitsklauseln, d.h. eine Regel wie $Vt \rightarrow kicked$ wird zu $Vt(kicked.k,k) \Leftarrow$. Es ist nunmehr möglich, Übersetzungsregeln zu formulieren, die PS-Regeln in Regeln der Logikgrammatik überführen: Ein Ausdruck wie

$A \rightarrow B\ C$ wird übersetzt in $A(k_0,k) \Leftarrow B(k_0,k_1),\ C(k_1,k)$

Allgemein soll gelten:

1. Seien A, $B_1,\ldots,B_n$ nichtterminale Symbole und k_i Variable über Wortketten, so gilt
   $A \rightarrow B_1 \ldots B_n$ wird übersetzt in
   $A(k_0,k_n) \Leftarrow B_1(k_0,k_1),\ldots,\ B_i(k_{i-1},k_i),\ldots,\ B_n(k_{n-1},k_n)$,
   wobei für k_n einfach k geschrieben werden kann.
2. Sind A und B_i nichterminale Symbole und ist a ein Terminalsymbol so gilt:
   $A \rightarrow a$ wird übersetzt in $A(a.k,k) \Leftarrow$;
   $\ldots B_i\ a \ldots$ wird übersetzt in $\ldots,\ B_i(k_{i-1},a.k_i),\ \ldots$

Unter Berücksichtigung dieser Übersetzungsregeln kann eine DCG im wesentlichen in der bekannten Form der PSG formuliert werden.[25]

Nun ist mehrfach gezeigt worden, daß kontextfreie Phrasenstrukturgrammatiken in dieser einfachen Form nicht deskriptiv adäquat sind. Der DCG-Formalismus enthält daher auch zwei wesentliche Erweiterungen, die seine Expressivität und Mächtigkeit erheblich vergrößern:

1. Nichtterminale Symbole sind nicht atomar, sondern können durch eine beliebige Zahl von Argumenten aus Termen beliebiger Komplexität erweitert werden, die der Unifikation unterliegen, z.B.
   $Satz \rightarrow NP(num,pers), VP(num,pers)$.
2. Es können beliebige Bedingungen (*constraints*) in Form von zusätzlichen Literalen (bzw. Klauseln) hinzugefügt werden. Diese bleiben bei der Übersetzung erhalten, und werden durch geschweifte Klammern gekennzeichnet, z.B.
   $Satz \rightarrow NP(typ_1), VP(typ_2), \{subtyp(typ_1,typ_2)\}$

Wir benötigen entsprechend zusätzliche Übersetzungsregeln:

1. $A(x_\iota,\ldots,x_\nu) \rightarrow \ldots$ wird übersetzt in $A(x_\iota,\ldots,x_\nu,k_0,k) \Leftarrow \ldots$;
   $B_i(x_\iota,\ldots,x_\nu)$ wird übersetzt in $B_i(x_\iota,\ldots,x_\nu,k_{i-1},\ k_i)$
2. $\{B_1,\ldots,\ B_n\}$ wird übersetzt in $B_1,\ \ldots,\ B_n$

Zusätzliche Argumente können beispielsweise dazu verwendet werden, Abhängigkeiten der verschiedensten Art zu formulieren. Eine Regel wie

(4.68.) $Satz \rightarrow NP(num,pers),\ VP(num,pers)$
(in der Übersetzung: $Satz(k_0,k) \Leftarrow NP(num,pers,k_0,k_1), VP(num,pers,\ k_1,k)$)

drückt z.B. den Sachverhalt aus, daß Subjekt und Prädikat hinsichtlich der grammatischen Kategorien NUMERUS und PERSON übereinstimmen müssen.

Da die Argumente beliebig komplexe Terme sein können, ist es möglich, gleichzeitig mit der Konstruktion eines Beweises Strukturbeschreibungen durch Unifikation aufzubauen. Unsere Beispielgrammatik erhält dadurch folgende Form:

---

[25] In der üblichen Form der DCG werden terminale Symbole in eckige Klammern [ ] gesetzt, z.B. $N \rightarrow$ [*boy*]. Diese Klammern werden in Prolog zur Kennzeichnung von Listen verwendet und terminale Symbole sind einelementige Listen.

(4.69.) **DC-Grammatik mit zusätzlichem Argument zur Strukturbeschreibung**

R1: $Satz(S(np_0,vp)) \rightarrow NP(np_0),\ VP(vp)$
R2: $NP(NP(d,n)) \rightarrow Det(d),\ N(n)$
R3: $NP(NP(name)) \rightarrow Name(name)$
R4: $VP(VP(vt,np_1) \rightarrow Vt(vt),\ NP(np_1)$
R5: $VP(VP(vi)) \rightarrow Vi(vi)$
Lexikon:
$Det(Definite) \rightarrow the$
$N(N(boy)) \rightarrow boy$
$N(N(girl)) \rightarrow girl$
$N(N(ball)) \rightarrow ball$
$Name(N(John)) \rightarrow John$
$Name(N(Mary)) \rightarrow Mary$
$Vt(Vt(love)) \rightarrow loves$
$Vt(Vt(kick)) \rightarrow kicked$
$Vi(Vi(jump)) \rightarrow jumped$
$Vi(Vi(laugh)) \rightarrow laughed$

Nach unseren Übersetzungsregeln erhalten wir daraus das folgende Logikprogramm:

(4.70.) **DCG in Klauselnotation mit zusätzlichem Argument zur Strukturbeschreibung**

R1: $Satz(S(np_1,vp),x_1,\ z_1) \Leftarrow NP(np_1,x_1,y_1),\ VP(vp,y_1,z_1)$
R2: $NP(NP(d,n),x_2,\ z_2) \Leftarrow Det(d,x_2,y_2),\ N(n,y_2,z_2)$
R3: $NP(NP(name),x_3,z_3) \Leftarrow Name(name,x_3,z_3)$
R4: $VP(VP(vt,np_2),x_4,\ z_4) \Leftarrow Vt(vt,x_4,y_4),\ NP(np_2,y_4,z_4)$
R5: $VP(VP(vi),x_5,z_5) \Leftarrow Vi(vi,x_5,z_5)$
Lexikon:
$Det(Det(Definite),the.z_6,z_6) \Leftarrow$
$N(N(boy),boy.z_7,z_7) \Leftarrow$
$N(N(girl),girl.z_8,z_8) \Leftarrow$
$N(N(ball),ball.z_9,z_9) \Leftarrow$
$Name(N(John),John.z_{10},z_{10}) \Leftarrow$
$Name(N(Mary),Mary.z_{11},z_{11}) \Leftarrow$
$Vt(Vt(love),loves.z_{12},z_{12}) \Leftarrow$
$Vt(Vt(kick),kicked.z_{13},z_{13}) \Leftarrow$
$Vi(Vi(jump),jumped.z_{14},z_{14}) \Leftarrow$
$Vi(Vi(laugh),laughed.z_{15},z_{15}) \Leftarrow$

Die folgende Seite zeigt die Ableitung des Satzes *John kicked the ball* mit gleichzeitiger Konstruktion einer Strukturbeschreibung. Die mit *S*: bezeichnete Zeile zeigt nach jedem Resolutionsschritt die Strukturbeschreibung nach Anwendung des Unifikators auf den vorherigen Output. Zu beweisen ist die Aussage: $\bigvee sb\ Satz(sb,\ John.kicked.the.ball.nil,nil)$, d.h. die Zielklausel
$\Leftarrow Satz(sb,John.kicked.the.ball.nil,nil)$.

Z: $\Leftarrow Satz(sb,John.kicked.the.ball.nil,nil)$
P: $Satz(S(np_1,vp),x_1,z_1) \Leftarrow NP(np_1,x_1,y_1),VP(vp,y_1,z_1)$
U: $\{sb/S(np_1,vp),x_1/John.kicked.the.ball.nil,z_1/nil\}$
S: $S(np_1,vp)$
R: $\Leftarrow NP(np_1,John.kicked.the.ball.nil,y_1),VP(vp,y_1,nil)$

Z = R:
P: $NP(NP(name),x_3,z_3) \Leftarrow Name(name,x_3,z_3)$
U: $\{np_1/NP(name),x_3/John.kicked.the.ball.nil,z_3/y_1\}$
S: $S(NP(name),vp)$
R: $\Leftarrow Name(name, John.kicked.the.ball.nil,y_1),VP(vp,y_1,nil)$

Z = R:
P: $Name(N(John),John.z_{10},z_{10}) \Leftarrow$
U: $\{name/N(John),z_{10}/kicked.the.ball.nil,y_1/kicked.the.ball.nil\}$.
S: $S(NP(N(John)), vp)$
R: $\Leftarrow VP(vp,kicked.the.ball,nil)$

Z = R:
P: $VP(VP(vt,np_2),x_4,z_4) \Leftarrow Vt(vt,x_4,y_4),NP(np_2,y_4,z_4)$
U: $\{vp/VP(vt,np_2), x_4/kicked.the.ball.nil,z_4/nil\}$
S: $S(NP(N(John)),VP(vt,np_2))$
R: $\Leftarrow Vt(vt,kicked.the.ball.nil,y_4),NP(np_2,y_4,nil)$

Z = R:
P: $Vt(Vt(kick),kicked.z_{13},z_{13}) \Leftarrow$
U: $\{vt/Vt(kick),z_{13}/the.ball.nil,y_4/the.ball.nil\}$
S: $S(NP(N(John)),VP(Vt(kick),np_2))$
R: $\Leftarrow NP(np_2,the.ball.nil,nil)$

Z = R:
P: $NP(NP(d,n),x_2,z_2) \Leftarrow Det(d,x_2,y_2),N(n,y_2,z_2)$
U: $\{np_2/NP(d,n),x_2/the.ball.nil,z_2/nil\}$
S: $S(NP(John),VP(Vt(kick),NP(d,n)))$
R: $\Leftarrow Det(d,the.ball.nil,y_2),N(n,y_2,nil)$

Z = R:
P: $Det(Det(Definite),the.z_6,z_6) \Leftarrow$
U: $\{d/Det(Definite),z_6/ball,nil,y_2/ball.nil$^
S: $S(NP(John),VP(Vt(kick),NP(Det(Definite),n)))$
R: $\Leftarrow N(n,ball.nil,nil)$

Z = R:
P: $N(N(ball),ball.z_9,z_9) \Leftarrow$
U: $\{n/N(ball),z_9/nil$^
S: $S(NP(John),VP(Vt(kick),NP(Det(Definite),N(ball))))$
R: $\square$

Durch Regeln wie

(4.71.) $S \rightarrow NP(typ0), VP(typ_1), \{Subtyp(typ_0, typ_1)\}$

$\vdots$

$VP(typ_1) \rightarrow Vt(typ_1, typ_2), NP(typ_3), \{Subtyp(typ_3, typ_2)\}$

$Vt(Person, Universal) \rightarrow admired$

$\vdots$

$N(Person) \rightarrow John$

$N(Idea) \rightarrow sincerity$

$\vdots$

werden Kontextabhängigkeiten zwischen dem Verb und seinen Aktanten ausgedrückt, die z.B. *John admired sincerity* zulassen, **Sincerity admired John* aber ausschließen. Das Prädikat *Subtyp* kann dabei z.B. auf eine Typhierarchie Bezug nehmen.

In ähnlicher Weise ließe sich eine Semantik im Stile von Montague in die DCG integrieren.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMSON, HARVEY & DAHL, VERNONICA

1989 *Logic Grammars*. Springer-Verlag: New York etc.

BATES. M.

1978 The Theory and Practice of Augmented Transition Network Grammars. In: BOLC (1978), 191–259.

BOLC, LEONARD (ED.)

1978 *Natural Language Communication with Computers*. Springer Verlag: Berlin.

COLMERAUER, ALAIN

1978 Metamorphosis Grammars. In BOLC(1978), 1933–89.

GROSZ, BARBARA J., KAREN SPARCK JONES, & BONNIE LYNN WEBBER, EDS.

1986 *Readings in Natural Language Processing*. Morgan Kaufmann: Los Altos, California.

LLOYD, J.W.

1984 *Foundations of Logic Programming*. Springer-Verlag: Berlin etc.

PEREIRA, FERNANDO C.N. & STUART M. SHIEBER

1987 *Prolog and Natural-Language Analysis*. Center for the Study of Language and Information: Stanford.

PEREIRA, FERNANDO C. N. & DAVID H. D. WARREN

1980 Definite clause grammars for language analysis — a survey of the formalism and a comparison with augmented transition networks. In: *Artificial Intelligence* **13**:231–278. (Reprint in GROSZ et. al. 1986).

ROBINSON, J.A.

1965 A machine-oriented logic based on the resolution principle. In: *Journal of the ACM* **12**:23–44.

WOODS, W. A.

1970 Transition Network Grammars for Natural Language Analysis. In: *Communications of the ACM* **3**: 591–606. (Reprint in GROSZ et al. 1986: 71–87.)

Kapitel 5.
Grundbegriffe der Mengenlehre

5.1. Warum Mengenlehre?

Rolle von Mengen in der Begriffsentwicklung der Linguistik.
Kategorien: lexikalische und syntaktische
Distribution
Merkmale

Mengen als Alltagsbegriffe.
Naive Mengenlehre

5.2. Menge und Element

Einer der allgemeinsten Begriffe ist der Begriff MENGE, die Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten (Individuen) zu einem begrifflichen Ganzen. Natürliche Sprachen enthalten zahlreiche Wörter wie *Gruppe, Herde, Meute, Rudel, Schar, Schwarm, Mannschaft*, die zur Bezeichnung von Mengen in diesem Sinne verwendet werden.

Definition 5.1. *Individuum*

> Bestimmte, wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens nennen wir INDIVIDUEN.

Individuen nicht notwendigerweise konkret

Definition 5.2. *Menge*

> Unter einer Menge versteht man jede Zusammenfassung von Individuen zu einem Ganzen.

Beispiele für Mengen:

- die Menge der Seminarteilnehmer
- die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind
- die Menge der Beamten, die Radfahrer sind
- die Menge der Wörter der deutschen Sprache
- die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als 0 sind

Definition 5.3. *Element*

> Die Objekte, die zu einer Menge zusammengefaßt sind, nennt man Elemente der Menge.

Beispiel:

Definition 5.4. *Elementbeziehung*

> Die ELEMENTBEZIEHUNG ist eine (zweistellige) logische Beziehung zwischen einem Individuum und der Menge, der das Individuum angehört.

Die ELEMENTBEZIEHUNG *ist Element von* wird durch $\in$, die Beziehung *ist nicht Element von* durch $\notin$ symbolisiert.

Es sei *M* die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 5 sind, dann gilt z.B.:

(5.1.) (a) 7 ist Element von *M*

(5.2.) (a) 4 ist nicht Element von *M*

In symbolisierter Sprache schreibt man dafür kürzer:

(5.1.) (b) $7 \in M$

(5.2.) (b) $4 \notin \mathrm{M}$

Ein Individuum kann gleichzeitig Element von mehreren Mengen sein. Es gibt einige zusammengesetzte Substantive wie *Jagdbomber* oder *Dichterkomponist*, die diese Eigenschaft aufweisen. Wenn jemand ein Dichterkomponist ist, ist er gleichzeitig ein Dichter und ein Komponist.

Die Elemente einer Menge brauchen weder konkret nocht real zu sein. Auch abstrakte oder imaginäre Objekte wie Zahlen, Einhörner, oder der Stein der Weisen können Elemente einer Menge sein. Da Mengen als Ganzheiten betrachtet werden, können die Elemente einer Menge können selbst Mengen sein. Die *Bundesliga* z.B. ist eine Menge von Elementen, die selbst Mengen sind, die Bundesligamannschaften, die ihrerseits Mengen von Individuen, den einzelnen Spielern, sind.

Mengen können aus endlich oder unendlich vielen Elementen bestehen. Die Menge der Seminarteilnehmer ist endlich, die Menge der natürlichen Zahlen unendlich.

Man kann Mengen auf zwei Arten beschreiben:

1. indem man Ihre Elemente aufzählt
2. durch eine Beschreibung, die auf alle Elemente zutrifft (Aussonderung durch eine Eigenschaft)

Mengen kennzeichnet man durch geschweifte Klammern (Mengenklammern): { }

Gegeben sei die Menge *M* der natürlichen Zahlen, die kleiner als 5 sind. In aufzählender Schreibweise ist *M* beschrieben durch:

(5.3.) $\{1, 2, 3, 4\}$

Die Reihenfolge der Nennung der Elemente spielt dabei keine Rolle. Die Mengen (5.3.) und (5.4.) sind identisch:

(5.4.) $\{2, 3, 1, 4\}$

Die aufzählende Mengenschreibweise ist nur möglich bei endlichen Mengen und nur praktisch bei kleinen Mengen. Sie ist allerdings notwendig bei Mengen, deren Elemente keine gemeinsame Eigenschaft haben, wie z.B. die Menge {Hut, 3, §}.

Die Menge der natürlichen Zahlen läßt sich nicht durch Aufzählung beschreiben.

Man vergleiche folgende Paraphrasen:

(5.5.)

a) Menge der natürlichen Zahlen
b) Menge der Objekte, die natürliche Zahlen sind
c) Menge der Objekte mit der Eigenschaft *natürliche Zahl*
d) Menge der *x*, für die gilt, *x* ist eine natürliche Zahl
e) Menge der *x*, für die gilt, *x* hat die Eigenschaft *natürliche Zahl*

Die Ausdrücke (5.5.) (d) und (e) lassen sich in symbolisierte Sprache übersetzen:

1. der Ausdruck *Menge der* wird durch die Mengenklammer symbolisiert
2. der Ausdruck für *die gilt* wird durch einen Längsstrich '|' symbolisiert

3. der Ausdruck x hat die Eigenschaft P wird durch den prädikatenlogischen Ausdruck $P(x)$ symbolisiert

Der Ausdruck (5.5.)(d) läßt sich dann wie folgt in symbolisierter Sprache schreiben:

(5.6.) $\{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl$\}$

Bezeichnet man den Ausdruck *natürliche Zahl* durch das Symbol N, kann man noch kürzer schreiben

(5.7.) $\{x \mid N(x)\}$

Ausdrücke, mit denen man Mengen bezeichnet, nennt man Mengenzeichen. Die Ausdrücke $\{..., ..., ...\}$ und $\{x \mid P(x)\}$ sind Mengenzeichen. Als allgemeine Mengenzeichen verwendet man Großbuchstaben: A, B, C ..., insbesondere M mit oder ohne Index (M_1, M_2, M_i ...).

Verschiedene Mengenzeichen können die gleiche Menge bezeichnen.

Beispiel:

(5.8.) (a) $\{1, 2\}$
(b) $\{x \mid x$ ist natürliche Zahl kleiner als 3$\}$

Statt "die durch A bezeichnete Menge" sagt man kurz "die Menge A"

Man kann auch Regeln formulieren, welche die Bedingungen festlegen, die für die Mitgliedschaft in der Menge erfüllt sein müssen. Sei $G=\{2, 4, 6, \ldots\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen (d.h. $G=\{x \mid gerade(x)\}$, dann läßt sich die Mitgliedschaft wie folgt definieren:

1. ist ein Element von G
2. wenn x ein Element von G ist, dann ist auch $x+2$ in G
3. nur nach 1. oder 2. bildbare Individuen sind Elemente von G

Durch eine unerfüllbare Bedingung wie $x<0 \wedge x>1$ wird man auf die LEERE MENGE geführt.

Definition 5.5. *leere Menge*

> Die LEERE MENGE oder NULLMENGE ist die Menge, die keine Elemente hat. Sie wird üblicherweise durch das Zeichen $\varnothing$ bezeichnet, obwohl das Mengenzeichen $\{\ \}$ konsequenter wäre. Es kann nur eine leere Menge geben. Man kann sie durch eine beliebige unerfüllbare Eigenschaft definieren, z.B.:
>
> $\varnothing := \{x \mid x \neq x\}$

Ein weiterer Sonderfall einer Menge ist eine Menge mit nur einem Element. Obwohl es Ausdrücke wie *Einmannbebtrieb* oder *Einmannkapelle* gibt, besteht in der Alltagssprache die Neigung Einermengen mit dem Objekt, aus dem sie jeweils bestehen, zu identifizieren. Für eine saubere Begriffsbildung ist es jedoch notwendig, die beiden zu unterscheiden. Bob Beamon und die Menge, die Bob Beamon als einziges Element enhält sind nicht die gleichen Objekte. Bis 1991 konnte letztere beispielsweise definiert werden als die Menge aller Leichtathleten, die 8,90m oder weiter gesprungen sind. Bis 1991 traf es sich, daß diese Menge nur Bob Beamon als Element enhielt. Seit den olympischen Spielen von Tokyo 1991 kam mit Mike Powell ein zweites Element hinzu.

Definition 5.6. *Einermenge*

> Eine EINERMENGE ist eine Menge mit nur einem Element. Ist M eine Menge, dann ist $\{M\}$ die Einermenge von M.

Sei $H=\{a, b\}$, dann ist $\{H\}=\{\{a, b\}\}$. Man beachte, daß H zwei Elemente hat, $\{H\}$ aber nur eines.

Häufig werden die Bezeichnungen MENGE und KLASSE mit gleicher Bedeutung verwendet. Es ist jedoch sinnvoll einen Unterschied zu machen und von KLASSEN nur dann zu sprechen, wenn die Elemente durch gleiche Eigenschaften definiert sind:

Definition 5.7. *Klasse*

Eine Menge ist eine KLASSE, wenn alle ihre Elemente durch gemeinsame Merkmale definiert sind.

Die meisten Mengen, mit denen wir es in der Sprachwissenschaft zu tun haben, sind Klassen in diesem Sinne.

5.3. Beziehungen zwischen Mengen

Man kann Mengen hinsichtlich ihrer Elemente vergleichen und aufgrund gewisser Beziehungen zwischen Mengen neue Mengen bilden.

Definition 5.8. *gleich*

Zwei Mengen heißen GLEICH, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

$A = B :\Leftrightarrow \bigwedge x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Definition 5.9. *disjunkt*

Zwei Mengen heißen DISJUNKT, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

$\text{disjunkt}(A, B) :\Leftrightarrow \neg \bigvee x(x \in A \wedge x \in B)$

Definition 5.10. *Teilmenge*

Eine Menge M_1 ist TEILMENGE einer Menge M_2 (ist in M_2 enthalten), wenn jedes Element aus M_1 auch Element aus M_2 ist. Die Beziehung IST ENTHALTEN wird durch das Zeichen $\subseteq$ symbolisiert.

$M_1 \subseteq M_2 :\Leftrightarrow \bigwedge x\ (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)$

Beispiel: Die Menge {a, c, e} ist in der Menge {a, b, c, d, e} enthalten.

Nach der Definition der Teilmenge ist auch {a, c, e} in {c, e, a} enthalten. Diese Mengen sind jedoch identisch. Nach dieser Definition ist jede Menge in sich selbst enthalten. Das kommt auch in der Form des Inklusionszeichens $\subseteq$ zum Ausdruck, das man sich aus den Zeichen $\subset$ und = zusammengesetzt denken kann.

Es gibt noch einen engeren Begriff der Teilmenge der den Fall der Gleichheit von Mengen ausschließt:

Definition 5.11. *Echte Teilmenge*

Eine Menge M_1 ist eine echte Teilmenge einer Menge M_2 (ist in M_2 echt enthalten), wenn M_1 eine Teilmenge von M_2 ist, beide Mengen aber verschieden sind: $M_1 \neq M_2$.

$M_1 \subset M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \wedge M_1 \neq M_2$

Zu den Begriffen TEILMENGE und ECHTE TEILMENGE gibt es die Umkehrbegriffe OBERMENGE und ECHTE OBERMENGE:

Definition 5.12. *Obermenge*

Eine Menge M_1 ist eine Obermenge einer Menge M_2, genau dann, wenn M_2 eine Teilmenge von M_1 ist:
$M_1 \supseteq M_2 :\Leftrightarrow M_2 \subseteq M_1$

Definition 5.13. *echte Obermenge*

Eine Menge M_1 ist eine echte Obermenge einer Menge M_2, genau dann, wenn M_2 eine echte Teilmenge von M_1 ist:
$M_1 \supset M_2 :\Leftrightarrow M_2 \subset M_1$

Zwischen $\in$ und $\subset$ ist streng zu unterscheiden, was in der Alltagssprache häufig nicht beachtet wird. Der Ausdruck *ist ein* in *Hansi ist ein Kaninchen* und in *Ein Kaninchen ist ein Säugetier* bedeutet jeweils etwas anderes: im ersten Falle bezeichnet es die Elementbeziehung (*Hansi* $\in$ *Kaninchen*) im zweiten die Teilmengenbeziehung (*Kaninchen*$\subset$ *Säugetier*).

Mengenbeziehungen können mit Hilfe von sog. VENNDIAGRAMMEN[26] veranschaulicht werden. Dabei muß man sich die Objekte, die zu Mengen zusammengefügt werden, in einer Ebene verteilt denken. Die Elemente einer bestimmten Menge werden durch eine Linie eingeschlossen.

Beispiel:

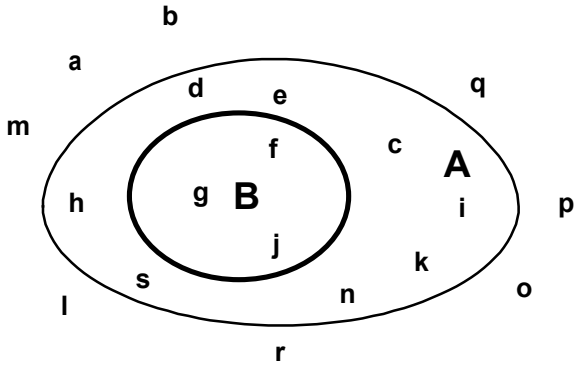


Abb. 5.1.

Durch die dünne Linie wird die Menge **A** = {c, d, e, f, g, h, i, j, k, n, s}dargestellt, durch die dicke Linie die Menge **B** ={f, g, j}.

Die graphische Darstellung zeigt deutlich, daß **B** echte Teilmenge von **A** ist.

Wenn zwei "Mengenlinien" sich schneiden, entstehen neue geschlossene Linienzüge, d.h. neue Mengen.

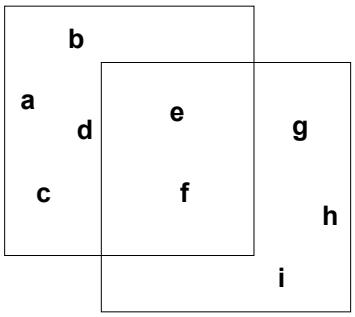


Abb. 5.2.

[26] nach dem britischen Logiker J. Venn. *1834, † 1923.

Außer den Mengen **A** ={a, b, c, d, e, f} und **B** ={e, f, g, h, i} sind in Abb. 5.2. noch vier weitere Mengen dargestellt, die sich unter Bezug auf die Mengen **A** und **B** definieren lassen.

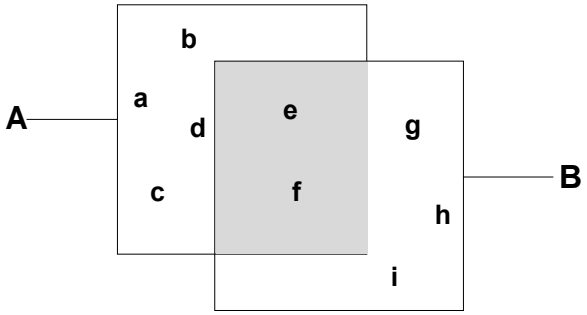


Abb. 5.3.

In Abb. 5.3. ist die Menge {e, f} herausgehoben. Bezogen auf die Mengen **A** und **B** läßt sie sich beschreiben als die Menge der Elemente, die Elemente sowohl aus **A** also auch aus **B** sind. Sie wird SCHNITTMENGE von **A** und **B** genannt. Die Operation der Schnittbildung wird durch das Zeichen $\cap$ symbolisiert. Für die Schnittmenge von **A** und **B** schreibt man in symbolisierter Sprache

(5.9.) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

Dieser Ausdruck wird gelesen als "**A** geschnitten mit **B**".

Definition 5.14. *Schnittmenge*

> Die Schnittmenge zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge der Elemente, die sowohl zu M_1 als auch zu M_2 gehören:
> $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$
> Man bezeichnet die Schnittmenge auch als DURCHSCHNITT oder als INTERSEKTION.

Wenn zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente haben, dann ist ihre Schnittmenge die leere Menge. Die leere Menge wird durch das Zeichen $\varnothing$ symbolisiert. Zwei Mengen, deren Schnittmenge leer ist, werden DISJUNKT oder ELEMENTFREMD genannt.

disjunkt

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind disjunkt oder elementfremd, wenn $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

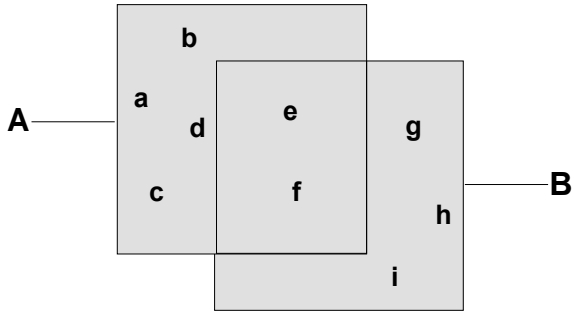


Abb. 5.4.

Die in Abb. 5.4. dargestellte Menge läßt sich beschreiben als die Menge der Elemente, die entweder zu **A** oder zu **B** oder zu beiden gehören. Man nennt sie die VEREINIGUNGSMENGE von **A** und **B**. Die Operation der Vereinigung wird durch das Zeichen $\cup$ symbolisiert. Für die Vereinigungsmenge von **A** und **B** schreibt man in symbolisierter Sprache

$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

Dieser Ausdruck wird gelesen als "**A** vereinigt mit **B**".

Definition 5.15. *Vereinigungsmenge*

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge der Elemente, die entweder zu M_1 oder zu M_2 gehören:
$M_1 \cup M_2 := \{ x | x \in M_1 \vee x \in M_2 \}$

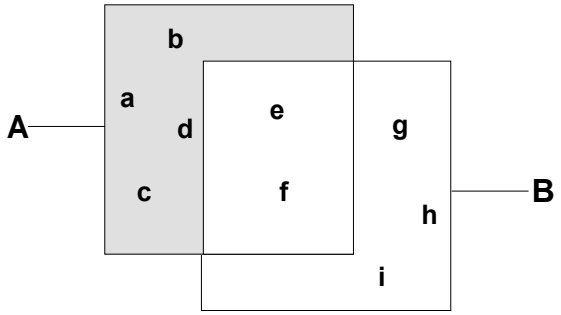


Abb. 5.5.

In Abb. 5.5. ist die Menge {a, b, c, d} hervorgehoben. Bezogen auf die Mengen **A** und **B** läßt sie sich beschreiben als die Menge der Elemente, die zu **A**, aber nicht zu **B** gehören. Sie wird DIFFERENZMENGE von **A** und **B** genannt und **A – B** (oder **A \ B**) geschrieben (lies: 'A minus B' oder 'A ohne B').

Definition 5.16. *Differenzmenge*

Die Differenzmenge zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge der Elemente, die zu M_1 aber nicht auch zu M_2 gehören:
$M_1 - M_2 := \{x | x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

Es ist manchmal sinnvoll, den zur Diskussion stehenden Gegenstandsbereich auf eine bestimmte Menge von Individuen einzuschränken. Es macht beispielsweise keinen Sinn, von der Sterblichkeit natürlicher Zahlen zu sprechen. Wenn wir also einen Ausdruck wie 'x ist sterblich' verwenden, setzen wir stillschweigend voraus, daß 'x' zu einer Menge von Individuen gehört, denen die Eigenschaft 'sterblich' sinnvoll zugeschrieben werden kann. Man bezeichnet den einer Theorie zugrunde liegenden Individuenbereich als GRUNDMENGE.

Definition 5.17. *Grundmenge*

Der Individuenbereich, über den in einem bestimmten Zusammenhang Aussagen gemacht werden, wird GRUNDMENGE genannt (engl. *universe of discourse*).

Definition 5.18. *Komplement*

Ist $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{G}$, so heißt **G–A** auch das KOMPLEMENT von **A** bezüglich **G**, das auch als $\overline{A}$ geschrieben wird, wenn durch den Zusammenhang kein Zweifel besteht, welche Menge **G** gemeint ist, beispielsweise wenn **G** die Grundmenge ist.

Kapitel 6.
Systeme und Strukturen

Es wurde gesagt, die Linguistik sei eine Systemwissenschaft und eine Strukturwissenschaft. Im alltäglichen Gebrauch werden die Begriffe SYSTEM und STRUKTUR häufig gebraucht. Sie haben jedoch in verschiedenen Zusammenhängen teilweise verschiedene Bedeutungen. Für die Wissenschaft müssen die Begriffe System und Struktur jedoch genau definiert sein.

Im folgenden soll schrittweise auf die Definition von System und Struktur hingeführt werden.

6.1. Geordnete Paare

Wir sehen die Welt nicht als eine chaotische und gestaltlose Ansammlung von Erscheinungen, vielmehr stellen wir eine gewisse ORDNUNG fest, wo jedes Objekt "seinen Platz" hat und von jedem anderen Objekt unterschieden ist. Objekte können nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet sein, und wir selbst können Objekte nach verschiedenen Gesichtspunkten ordnen. So ordnen wir die Buchstaben, mit denen die deutsche Sprache geschrieben wird, in alphabetischer Reihenfolge, wir ordnen die Wörter in einem Lexikon nach dem Prinzip des Alphabets usw.

Ein Ordnungsprinzip ist also die Reihenfolge.

Definition 6.1. *Geordnetes Paar*

> Wir nennen ein GEORDNETES PAAR zwei Objekte x und y, für die eine Reihenfolge festgelegt ist, also entweder erst x und dann y oder erst y und dann x.

Geordnete Paare werden durch Spitzklammern gekennzeichnet, z.B.:

$\langle x, y\rangle$ oder $\langle y, x\rangle$

Geordnete Paare sind durch folgende Eigenschaft charakterisiert:

(6.1.) $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ genau dann, wenn $x = u \wedge y = v$

Daraus folgt unmittelbar:

(6.2.) $\bigwedge x \bigwedge y\, [x \neq y \Rightarrow \langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle]$

Nun wird man eine Reihenfolge für irgendwelche Objekte nur dann festlegen, wenn zwischen ihnen eine bestimmte Beziehung besteht. Das legt einen Zusammenhang zwischen geordneten Paaren und Relationen nahe. So bilden z.B. *Kuno* und *Otto* ein geordnetes Paar $\langle$*Kuno, Otto*$\rangle$ hinsichtlich der Körpergröße, wenn gilt: *größer(Kuno, Otto).*

Genauso sinnvoll ist eine Festlegung der Reihenfolge von drei und mehr Objekten, z.B. wenn für sie drei- und mehrstellige Relationen gelten. Bei drei Elementen spricht man von einem geordneten TRIPEL, bei vier von einem geordneten QUADRUPEL und allgemein bei n von einem n-TUPEL:

Tripel:	$\langle x_1, x_2, x_3\rangle$	x_1 liegt zwischen x_2 und x_3
Quadrupel:	$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$	x_1 kauft x_2 von x_3 für x_4
n-tupel:	$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$	

Wir werden es vor allem mit geordneten Paaren zu tun haben.

6.2. Relationen und Mengen

Nun kann die Beziehung zwischen den Elementen eines geordneten Paares einfach darin bestehen, daß das erste zu einer Menge **A** und das zweite zu einer Menge **B** gehört. Nehmen wir an, die Menge A sei $\{Fritz, Hans, Kuno\}$ und B $\{Maria, Luise\}$, dann ist z.B. $\langle Fritz, Maria\rangle$ ein mögliches geordnetes Paar.

Man stelle sich vor, die Herren **A** und die Damen **B** seien auf einer Tanzveranstaltung. Man kann nun z.B. fragen, wieviele Tanzpaarungen zustande kommen, wenn nur die Herren die Damen zum Tanz auffordern. Es ist die Menge aller geordneten Paare $\langle x, y\rangle$, wobei x ein Herr, also ein Element aus A, und y eine Dame, also ein Element aus B ist. Man nennt diese Menge CARTESISCHES PRODUKT von A und B (oder VERBINDUNGSMENGE) und schreibt dafür $A\times B$ (lies: A kreuz B).

Definition 6.2. *Cartesisches Produkt (Verbindungsmenge)*

> Seien A und B zwei (nichtleere) Mengen. Das cartesische Produkt $A\times B$ dieser Mengen ist die Menge der geordneten Paare $\langle x, y\rangle$ mit x aus A und y aus B: $A\times \mathrm{B} := \{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$

In unserem Beispiel ist

$A\times B = \{\langle Fritz, Maria\rangle, \langle Fritz, Luise\rangle, \langle Hans, Maria\rangle, \langle Hans, Luise\rangle, \langle Kuno, Maria\rangle, \langle Kuno, Luise\rangle\}$

Natürlich läßt sich auch das cartesische Produkt aus mehr als zwei Mengen bilden. Sind A, B, C Mengen, dann ist $A\times B\times C$ die Menge aller geordneten Tripel $\langle x, y, z\rangle$ mit x aus A, y aus B und z aus C. Es sei $A = \{der, dieser\}$, $B = \{Bursche\}$ und $C = \{raucht, schläft\}$; dann ist $A\times B\times C$ die Menge:

$\{\langle der, Bursche, raucht\rangle, \langle dieser, Bursche, raucht\rangle,$
$\langle der, Bursche, schläft\rangle, \langle dieser, Bursche, schläft\rangle\}$

Ein Sonderfall liegt vor, wenn $B = A$. Das cartesische Produkt $A\times A$ einer Menge A mit sich selbst ist die Menge aller geordneten Paare, die sich aus den Elementen von A bilden lassen. Man nennt diese Menge auch PAARMENGE von A:

Definition 6.3. *Paarmenge*

> Die Paarmenge $A\times A$ einer Menge A ist die Menge aller geordneten Paare $\langle x, y\rangle$ mit x und y aus A: $A\times A := \{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\}$

Sei $A=\{a,b\}$. Dann ist $A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

In gleicher Weise kann man von einer TRIPEL-Menge ($A\times A\times A$) und allgemein von einer n-tupel-Menge sprechen.

Konstituentenstrukturgrammatiken können auch mengentheoretisch interpretiert werden. Eine Regel wie

$S \rightarrow NP^\frown VP$

wird dann aufgefaßt als

$S = NP\times VP$

d.h., die Menge der Sätze ist das kartesische Produkt aus der Menge der Nominalphrasen und der Menge der Verbalphrasen. Nominalphrasen ihrerseits sind definiert als das kartesische Produkt aus der Menge der Determinatoren und der Menge der Nomina:

$NP\rightarrow Det^\frown N$

$NP=Det\times N$

Sei *Det*={*the, a*} und *N*={*boy, dog*}, dann ist *NP*=*Det*×*N*={⟨*the, boy*⟩,⟨*the, dog*⟩, ⟨*a,boy*⟩, ⟨*a, dog*⟩}

Wir haben gesehen, daß ein Allgemeinbegriff wie *Pferd* auf zweierlei Weise interpretiert werden kann. Es ist einmal ein EIGENSCHAFTSBEGRIFF, d.h. es meint die Summe der (invarianten) Eigenschaften, die jedem Exemplar 'Pferd' zukommen. Das kommt zum Ausdruck, wenn wir einen Satz wie (6.4)(a) als (6.4)(b) umschreiben:

(6.3.) (a) Halla ist ein Pferd
(b) Halla kommt die Eigenschaft 'Pferd' zu.
(c) Pferd(Halla)

Es ist andererseits ein Klassenbegriff, d.h. es meint die Menge aller Individuen, denen die Eigenschaft *Pferd* zukommt. Das kommt zum Ausdruck, wenn wir (6.4)(a) wie in (6.5)(a) umschreiben:

(6.4.) (a) Halla ist ein Exemplar aus der Menge der Pferde
(b) Halla $\in$ {x | Pferd(x)}

Das gleiche gilt für alle Prädikate, auch für zwei- und mehrstellige, d.h. es gilt auch für RELATIONEN. Die Relation *größer (als)* läßt sich einmal auffassen als eine Menge von Eigenschaften, die einem bestimmten Individuenpaar, z.B. *Fritz* und *Kuno* zukommt:

(6.5.) (a) Fritz ist größer als Kuno
(b) Fritz, Kuno kommt das Prädikat größer (als) zu
(c) *größer (Fritz, Kuno)*

Die Relation *größer (als)* läßt sich andererseits als KLASSENBEGRIFF auffassen, d.h. es bezeichnet die Menge aller Individuenpaare, denen das Prädikat *größer (als)* zukommt.

(6.6.) (a) ⟨*Fritz, Kuno*⟩ ist ein Exemplar aus der Menge der Paare, zwischen denen die Beziehung *größer (als)* besteht.
(b) ⟨*Fritz, Kuno*⟩$\in$ {⟨*x, y*⟩ | *größer*(*x, y*)}

Der Begriff Relation läßt sich wie folgt als Menge definieren:

Definition 6.4. *Relation*

$$R := \{\langle x,y\rangle \mid R(x,y)\}$$

In diesem Sinne ist auch die Paarmenge einer Menge *M* eine Relation. Man nennt sie die ALLRELATION von *M*.

Definition 6.5. *Allrelation*

Die Allrelation einer Menge *M* ist gleich der Paarmenge von *M*.

Definition 6.6. *Relation in einer Menge M*

Eine Relation *R* ist eine Relation **in** einer Menge *M*, wenn sie in der Allrelation von *M* enthalten ist, d.h. wenn gilt:

$$\bigwedge x\ [x \in R \Rightarrow x \in \mathrm{M}\times\mathrm{M}]$$

Man wird z.B. oft die Frage stellen, zwischen welchen Elementen einer gegebenen Menge *M* eine bestimmte Beziehung besteht. Ein Lehrer möchte z.B. etwas über die sozialen Beziehungen zwischen den Schülern einer Klasse *A* wissen. Er kann z.B. fragen, welche Schüler welche anderen Schüler mögen. Gesucht ist also die Menge

$$\{\langle x,y\rangle \mid x\in \mathrm{A} \wedge y\in \mathrm{A} \wedge mag(x,y)\}$$

Statt dessen kann man auch formulieren

(6.7.) $\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\times A \wedge mag(x, y)\}$

Diese Relation ist in $A\times A$ enthalten, d.h. sie ist im definierten Sinne eine Relation in A.

6.3. Relationseigenschaften

Relationen können nach bestimmten Eigenschaften unterschieden werden.

Man wird z.B. sagen, daß wenn (6.10) (a) wahr ist, auch (6.10) (b) wahr sein muß, und umgekehrt:

(6.8.) (a) Hans gleicht Peter
(b) Peter gleicht Hans

Eine Relation, die diese Eigenschaft hat, wird SYMMETRISCH genannt.

Definition 6.7. *Symmetrische Relation*

Eine Relation ist symmetrisch, wenn gilt: $\bigwedge x \bigwedge y\ [R(x,y) \Rightarrow R(y, x)]$

Weitere symmetrische Relationen sind: *parallel (zu), gleichwertig (mit), gleichgestaltig (mit), verwandt (mit).*

Ist eine Relation nicht symmetrisch, so sind zwei Fälle zu unterscheiden

1. die Relation ist nicht in allen Fällen umkehrbar, z.B. *Bruder:* ist *a* Bruder von *b*, dann ist *b* Bruder von *a* nur dann, wenn *b* männlichen Geschlechts ist;
2. die Relation ist in keinem Fall umkehrbar, z.B. *größer:* ist *a größer b* wahr, dann ist *b größer a* falsch; eine solche Relation heißt ASYMMETRISCH.

Definition 6.8. *Asymmetrische Relation*

Eine Relation ist asymmetrisch, wenn gilt: $\bigwedge x \bigwedge y\ [R(x, y) \Rightarrow \neg R(y,x)]$

Wenn *a* größer als *b* ist und *b* größer als *c*, dann ist sicher auch *a* größer als *c*. Eine Relation, die diese Eigenschaft hat, wird TRANSITIV genannt.

Definition 6.9. *Transitive Relation*

Eine Relation ist transitiv, wenn gilt: $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [R(x,y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)]$

Eine transitive Relation ist auch die Teilmengenbeziehung. Sind, x, y, z beliebige Mengen, so gilt:

(6.9.) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge x\ [(\mathrm{x} \subseteq y) \wedge (\mathrm{y} \subseteq \mathrm{z}) \Rightarrow (x \subseteq z)]$

Wenn die Aussage *Peter gleicht sich* auch komisch klingen mag, so ist sie doch wahr. Die Aussage ist sogar für jedes beliebige konkrete Objekt wahr. *Peter gleicht sich* ist das gleiche wie *Peter*$_{\mathrm{i}}$ *gleicht Peter*$_{\mathrm{i}}$. und das ist eine Aussage der Form $R(x, x)$. Wenn für jedes Individuum x aus einem bestimmten Individuenbereich stets gilt: $R(x, x)$, dann wird R REFLEXIV genannt.

Definition 6.10. *Reflexive Relation*

Eine Relation ist reflexiv, wenn gilt: $\bigwedge x\ R(x, x)$

Die Relation TEILMENGE ist ein weiteres Beispiel für eine reflexive Relation. Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B genau dann, wenn jedes Element aus A auch Element aus B ist:

(6.10.) $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\bigwedge x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Nun gilt trivialerweise, $\bigwedge x (x \in A \Rightarrow x \in A)$ und zwar für beliebige Mengen. Folglich gilt auch: $\bigwedge A\ (A \subseteq A)$.

Neben den genannten Relationseigenschaften gibt es noch eine Reihe weiterer, die hier nicht im einzelnen ausgeführt werden sollen.

So gilt z.B. für die Relation TEILMENGE: wenn A Teilmenge von B ist und B Teilmenge von A, dann ist A = B.

Für die Relation (leiblicher) *Vater* gilt: wenn *a* Vater von *c* ist und *b* Vater von *c*, dann ist $a = b$.

Wie die Beispiele gezeigt haben, können Relationen mehrere Eigenschaften gleichzeitig haben. So ist z.B. die Relation TEILMENGE u.a. REFLEXIV und TRANSITIV.

Von besonderer Wichtigkeit sind Relationen, die REFLEXIV, SYMMETRISCH und TRANSITIV sind. Sie werden ÄQUIVALENZRELATIONEN genannt.

Definition 6.11. *Äquivalenzrelation*

> Eine Relation ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Eine Äquivalenzrelation ist z.B. GLEICHGESTALTIG (G). Es ist leicht einzusehen, daß

- $\bigwedge x\ G(x, x)$ (Reflexivität)
- $\bigwedge x \bigwedge y\ [G(x, y) \Rightarrow G(y, x)$ (Symmetrie)
- $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [G(x, y) \wedge G(y, z) \Rightarrow G(x, z)]$ (Transitivität)

6.4. Abbildungen

Sei *R* die Relation *Ehemann* in einem bestimmten Personenbereich *P*. Z.B.:

$P = \{Peter, Fritz, Maria, Luise, Kuno, Ina, Theodor\}$

$R = \{\langle Peter, Ina\rangle, \langle Fritz, Luise\rangle, \langle Kuno, Maria\rangle\}$

Man kann nun einerseits die Menge der Elemente betrachten, die als erstes Element der geordneten Paare aus *R* vorkommen, also die Menge *V* = Peter, Fritz, Kuno. Man nennt diese Menge den VORBEREICH von *R*. Entsprechend nennt man die Menge der Elemente, die jeweils als zweites Element der Paare aus *R* vorkommen, den NACHBEREICH von *R*.

Definition 6.12. *Vorbereich*

> Der Vorbereich *V* einer Relation *R* ist die Menge der Elemente *x*, für die es ein Element *y* gibt, so daß $\langle x, y\rangle$ ein Element aus *R* ist:
> $V(R) := \{x \mid \bigvee y\ \langle x, y\rangle \in R\}$

Definition 6.13. *Nachbereich*

> Der Nachbereich *N* einer Relation *R* ist die Menge der Elemente *y*, für die es ein *x* gibt, so daß $\langle x, y\rangle$ ein Element aus R ist:
> $N(R) := \{y \mid \bigvee x\ \langle x, y\rangle \in R\}$

Eine Relation ist nacheindeutig, wenn jedem Element des Vorbereichs ein und nur ein Element des Nachbereichs zugesandte wird. Die Relation der Konfessionszugehörigkeit ist z.B. nacheindeutig, weil die Zugehörigkeit zu mehreren Konfessionen nicht zugelassen ist.

Definition 6.14. *Nacheindeutig*

Eine Relation ist nacheindeutig, wenn sie jedem Element des Vorbereichs genau ein Element des Nachbereichs zuordnet, d.h. wenn gilt:

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow y{=}z]$

Definition 6.15. *Voreindeutig*

Eine Relation ist voreindeutig, wenn sie jedem Element des Nachbereichs genau ein Element des Vorbereichs zuordnet, d.h. wenn gilt:

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [R(x, z) \wedge R(y, z) \Rightarrow x = y]$

Die Relation *Vater* ist voreindeutig, weil jeder Mensch nur einen (leiblichen) Vater hat.

Definition 6.16. *Eineindeutig*

Eine Relation ist eineindeutig, wenn sie sowohl voreindeutig als auch nacheindeutig ist.

Die Relation *Ehegatte* ist in einer monogamen Gesellschaft eineindeutig.

Eine Relation heißt ABBILDUNG oder FUNKTION, wenn sie nacheindeutig oder kurz: eindeutig ist. Die Relation der Konfessionszugehörigkeit ist eine Abbildung.

Definition 6.17. *Abbildung, Funktion*

Eine Relation ist eine Abbildung oder Funktion f, wenn sie (nach-) eindeutig ist, d.h. wenn gilt:

$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\ [R(x,y) \wedge R(x, z) \Rightarrow y = z]$

Ist eine Relation R in der Verbindungsmenge $A{\times}B$ enthalten, dann nennt man R eine Relation zwischen den Mengen A und B.

Beispiel: Sei A die Menge der Schüler einer bestimmten Schule und B die Menge der Lehrer dieser Schule. Dann ist die Relation R = *Schüler (von)* eine Relation zwischen A und B.

Definition 6.18. *Abbildung aus einer Menge in eine Menge*

Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Abbildung **aus A in B**, wenn R eine Funktion ist.

Beispiel:

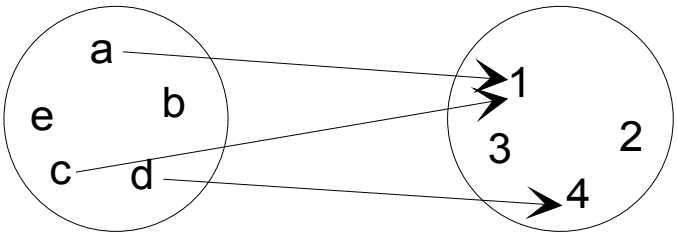


Abb. 6.6. Abbildung aus A in B

Die diesem Beispiel zugrunde liegende Funktion ist

f={⟨a,1⟩, ⟨c,1⟩,⟨d,4⟩}

Nehmen wir als weiteren Fall unser Schüler-Lehrer Beispiel. Dabei ist die Relation *x hat y als Klassenlehrer* eine Funktion, denn jeder Schüler hat nur einen Klassenlehrer. Diese Relation ist also eine Abbildung aus der Menge der Schüler in die Menge der Lehrer. Es liegt hier aber ein besonderer. Fall vor, denn es gibt keinen Schüler, der keinen Klassenlehrer hat. Das heißt, daß der Vorbereich der Funktion mit der Menge der Schüler identisch ist. In diesem Fall spricht man von einer Abbildung von einer Menge A in eine Menge B:

Definition 6.19. *Abbildung von einer Menge in eine Menge*

Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Abbildung **von A in B**, wenn R eine Funktion f ist und wenn gilt:
$V(f) = A \wedge N(f) \subset B$

Beispiel:

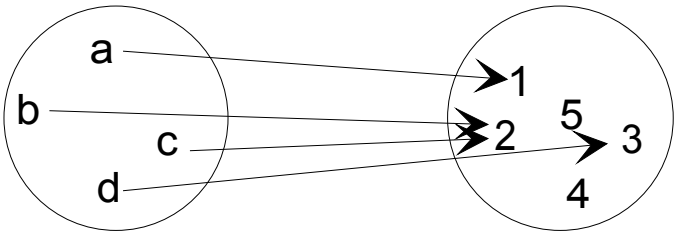


Abb. 6.7. Abbildung von A in B

Für "f ist eine Abbildung von A in B" schreibt man: f: $A \mapsto B$.

Definition 6.20. *Abbildung von einer Menge auf eine Menge*

Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Abbildung **von A auf B**, wenn R eine Funktion ist und wenn gilt:
$V(f) = A \wedge N(f) = B$

Beispiel:

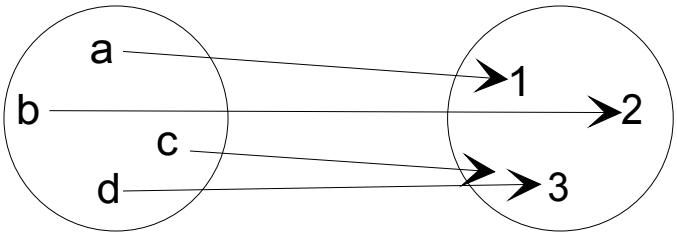


Abb. 6.8. Abbildung von A auf B

Ein Sonderfall liegt vor, wenn R eine eineindeutige Funktion ist. Dann ist die Abbildung von A auf B selbst eineindeutig.

Ist ein Paar $\langle x, y \rangle$ ein Element einer Abbildung, so nennt man y das BILD von x und x das URBILD von y. Man schreibt

$f(x) = y$

für "das Bild von x ist y". Dabei ist $f(x) = y$ nur eine andere Schreibweise für $f(x, y)$. Man schreibt

$f^{-1}(y) = x$

für "x ist das Urbild von y".

Eine eineindeutige Abbildung liegt dann vor, wenn jedes Urbild genau ein Bild und jedes Bild genau ein Urbild hat.

Ist A die Menge der Seiten in einem Buch und B die Menge der Seitenzahlen, dann ist R = *x hat die Seitenzahl y* eine eineindeutige Abbildung von A auf B.

6.5. System und Struktur

Es ist sinnvoll, die Begriffe System und Struktur zusammen zu behandeln, weil sie sich gegenseitig bedingen. Systeme sind strukturierte Gegenstände, Strukturen sind eine Eigenschaft von Systemen, sie existieren nicht unabhängig von Systemen. Ein System ist eine "nach Ordnungsprinzipien gegliederte Mannigfaltigkeit von materiellen Dingen, Prozessen usw. (MATERIELLES SYSTEM) oder von Begriffen, Aussagen usw. (IDEELLES SYSTEM)" (KLAUS/BUHR, *s.v.* System). In dieser Definition sind zwei zentrale mathematische Begriffe enthalten, die die Grundlage für eine allgemeine Definition des Systembegriffs bilden, nämlich die Begriffe RELATION (Ordnungsprinzipien) und MENGE (Mannigfaltigkeit von Dingen, Prozessen, Begriffen, Aussagen etc.). Im allgemeinsten Sinn ist ein System eine Menge von Elementen und eine Menge von Relationen zwischen den Elementen dieser Menge.

Definition 6.21. *System*

> Ein System ist ein geordnetes Paar $\Sigma = \langle M, \mathcal{R} \rangle$, wobei M eine Menge von Elementen ist und $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ in M.

Ein System in diesem Sinne ist z.B. das System der natürlichen Zahlen mit $M = \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und einer Vielzahl von Relationen wie z.B.

$R_1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \ldots\}$

(x ist um 1 kleiner als y, $f(x) = x+1$)

$R_2 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,9 \rangle, \langle 4,16 \rangle, \ldots\}$

($f(x)=x^2$)

$R_3 = \{\langle 1,1,2 \rangle, \langle 1,2,3 \rangle, \langle 1,3,4 \rangle, \ldots\}$

($f(x,y) = x + y$)

Um ein einfacheres Beispiel zu nehmen: Sei M = {*Fritz, Ina, Egon, Martha, Mark*} R_1= {*Egon, Martha*} (Ehemann)

R_2= {⟨*Egon, Fritz*⟩,⟨*Egon, Ina*⟩, ⟨*Egon, Marl*⟩} (Vater)

R_3 = {⟨*Martha, Fritz*⟩, ⟨*Martha, Ina*⟩, ⟨*Martha, Mark*⟩} (Mutter)

R_4 = {⟨*Fritz, Ina*⟩, ⟨*Fritz, Mark*⟩, ⟨*Mark, Fritz*⟩} (Bruder)

R_5 = {⟨*Ina, Fritz*⟩, ⟨*Ina, Mark*⟩} (Schwester)

Dann ist $\Sigma = \langle M, \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \rangle$ das Verwandtschaftssystem einer fünfköpfigen Familie.

Interessant an diesem Beispiel ist, daß nicht alle Verwandtschaftsbeziehungen explizit genannt werden müssen, weil sie aus anderen ableitbar sind. Zum Beispiel ist die Beziehung *Sohn* (S) aus der Beziehung *Vater*(V) und der Beziehung *Bruder*(B) ableitbar:

$V(x,y) \wedge B(y,z) \Rightarrow S(y,x)$

Aufgrund dieser allgemeinen Beziehung kann man aus R_2 und R_4 ableiten, daß *Fritz* und *Mark* Söhne von *Egon* sind.

Das ist wichtig für die Beschreibung von Systemen, denn man wird im allgemeinen nur die Relationen explizit nennen, die nicht aufgrund allgemeiner Gesetzmäßigkeiten von anderen Relationen ableitbar sind.

Das ist außerdem für den Strukturbegriff von Bedeutung, wenn man unter der Struktur eines Systems die Menge der Relationen in diesem System versteht:

Definition 6.22. *Struktur*

Ist $\sum = \langle M, \mathcal{R} \rangle$ ein System, dann nennt man $\mathcal{R}$ die Struktur von $\sum$.

Der Strukturbegriff läßt sich präziser fassen über den Begriff Strukturgleichheit (Isomorphie):

Definition 6.23. *Isomorphie*

Zwei Systeme $\sum = \langle M, \mathcal{R} \rangle$ und $\sum' = \langle M', \mathcal{R}' \rangle$ sind ISOMORPH (strukturgleich), wenn es eine eineindeutige Abbildung gibt, die jedem Element x aus M ein Element x' aus M' und jedem Element R_i aus $\mathcal{R}$ ein Element R_i' aus $\mathcal{R}'$ eineindeutig zuordnet, derart, daß, wenn ein n-tupel mit Elementen aus M ein Element aus R_i ist, das zugeordnete n-tupel mit Elementen aus M' ein Element aus R_i' ist.

Das klingt etwas kompliziert und soll daher gleich an Beispielen erläutert werden.

Beispiel 1: Sei $\sum = \langle \mathcal{N}, R \rangle$, wobei $\mathcal{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und R die Menge der geordneten Tripeln $\langle x, y, z \rangle$ mit $z = x + y$ ist, und $\sum' = \langle \mathcal{G}, R' \rangle$, wobei $\mathcal{G}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen und R' die Menge der geordneten Tripel $\langle x', y', z' \rangle$ mit $z' = x' + y'$ ist. Diese beiden Systeme sind isomorph, denn es gibt eine eineindeutige Abbildung f, die jedem Element aus $\mathcal{N}$ genau ein Element aus $\mathcal{G}$ zuordnet und jedem Element aus R genau ein Element aus R', wobei $f(\langle x, y, z \rangle) = \langle f(x), f(y), f(z) \rangle$ ist. Für. diese Abbildung gilt $f(u) = 2u$. Diese Abbildung ordnet also z.B. den Elementen 2, 3, 5 aus $\mathcal{N}$ die Elemente 4, 6, 10 aus $\mathcal{G}$ zu und dem Tripel $\langle 2, 3, 5 \rangle$ aus R das Tripel $\langle 4, 6, 10 \rangle$ aus R'. Man sieht sofort, daß $5 = 2 + 3$ und $10 = 4 + 6$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & x & y & & z{=}x{+}y & & & \\
 & & & | & | & & | & & & \\
\mathcal{N} & = & \{ & 1, & \mathbf{2}, & \mathbf{3}, & 4, & \mathbf{5}, & 6, & \ldots & \} \\
 & & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathcal{G} & = & \{ & 2, & \mathbf{4}, & \mathbf{6}, & 8, & \mathbf{10}, & \mathbf{12}, & \ldots & \} \\
 & & & | & | & & | & & & & \\
 & & & x' & y' & & z'{=}x'{+}y' & & & &
\end{array}
$$

Beispiel 2: Die Menge der Städte bilden mit einer Menge von Lagerelationen wie S = *südlich* von und W = *westlich von* ein System. Auf einer Landkarte sind den Städten Kartenpunkte und den Relationen S und W die Relationen U = *unterhalb von* bzw. L = *links von* eineindeutig zugeordnet. Sind zwei Städten x und y die Kartenpunkte x' und y' zugeordnet, so folgt aus $S(x, y)$, $U(x', y')$. Das System der Kartenpunkte und das System der geographischen Lage von Städten sind isomorph.

Man kann nun alle Systeme, die zueinander isomorph sind, in einer Menge zusammenfassen. Die Relation der Isomorphie (I) ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. sie ist eine Äquivalenzrelation.

Man kann die Menge zueinander isomorpher Systeme dadurch gewinnen, daß man von einem beliebigen System x ausgeht und fragt, welche Systeme zu x isomorph sind. Da die Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist, nennt man die so gewonnene Menge eine ÄQUIVALENZKLASSE.

Sei S die Menge aller Systeme, dann läßt sich die von einem beliebigen $x \in S$ mit der Äquivalenzrelation I ableitbare Äquivalenzklasse wie folgt charakterisieren:

$[x] = \{y \mid y \in S \wedge I(x, y)\}$

Man nennt $[x]$ dann die I-ÄQUIVALENZKLASSE VON X IN S. Es ist klar, daß x selbst in dieser Klasse enthalten sein muß. Zwei solcher Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ sind identisch, wenn x zu y isomorph ist:

(6.11.) $[x] = [y]$ genau dann, wenn $I(x,y)$

Man kann zeigen, daß die Menge der Systeme S durch die Isomorphierelation I vollständig in paarweise elementfremde Äquivalenzklassen $T_1, T_2,\ldots,T_n$ zerlegt wird, d.h.

$S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$

$T_i \cap T_j = \varnothing$

Zwei Systeme haben die gleiche Struktur, wenn sie isomorph sind. Alle Elemente einer I-Äquivalanzklasse T_i haben die gleiche Struktur. Man kann daher sagen, daß jedes T_i einen bestimmten Strukturtyp darstellt.

Die Aufteilung in einer Menge in paarweise elementfremde Teilmengen nennt man KLASSIFIKATION.

6.6. Ordnungsstrukturen

Ordnungsstrukturen sind Strukturen, die durch sog. ORDNUNGSRELATIONEN definiert werden. Ordnungsrelationen sind Relationen, die Mengen auf bestimmte Weise ordnen. Sie haben besondere Eigenschaften. Wir haben z.B. gesehen, daß der Begriff Äquivalenzrelation durch die Relationseigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv definiert ist.

Betrachten wir nun als Beispiel für einen anderen Relationstyp die Relation *Teilmenge.* Sie wird folgendermaßen charakterisiert:

(6.12.) $A \subseteq B = \bigwedge x\, [x \in A \Rightarrow x \in B]$

Das ist auch dann wahr, wenn man B durch A ersetzt:

(6.13.) $A \subseteq A = \bigwedge x\, [x \in A \Rightarrow x \in A]$

Daraus folgt, daß die Teilmengenbeziehung REFLEXIV ist.

Die Teilmengenbeziehung ist sicher nicht symmetrisch. Sie ist aber auch nicht asymmetrisch. Das ergibt sich unmittelbar aus der Reflexivität. Die Aussage $A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq A$ wird nämlich dann wahr, wenn man B durch A ersetzt: Anders ausgedrückt: wenn A in B enthalten ist und B in A, dann ist A = B.

Eine Relation, die diese Eigenschaft hat, wird ANTISYMMETRISCH genannt.

Definition 6.24. *Antisymmetrisch*

Eine Relation R ist antisymmetrisch wenn gilt:

$\bigwedge x \bigwedge y\, [R(x,y) \wedge R\,(y,x) \Rightarrow x = y]$

Die Teilmengenbeziehung ist also reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Eine Relation, die diese Eigenschaften hat, wird Ordnungsrelation genannt:

Definition 6.25. *Ordnungsrelation*

Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Ein weiteres Beispiel für eine Ordnungsrelation ist die Relation *nicht größer als* (= kleiner oder gleich groß) in der Menge der Zahlen. Es gilt:

1. a nicht größer als a;
2. wenn a nicht größer als b und b nicht größer als a, dann ist $a = b$;
3. ist a nicht größer als b und b nicht größer als c, dann ist a nicht größer als c.

Definition 6.26. *Halbordnung*

Ist R eine Ordnungsrelation in einer Menge M, dann nennt man R eine HALBORDNUNG der Menge M.

An einem Beispiel soll gezeigt werden, inwiefern man von einer Ordnung sprechen kann.

Aus einer Menge A kann man eine neue Menge bilden, die aus allen Teilmengen von A besteht. Man nennt diese Menge die POTENZMENGE von A:

Definition 6.27. *Potenzmenge*

Die Potenzmenge $\mathcal{P}$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A:
$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$

Ist z.B. $A = \{1, 2, 3\}$, dann ist

(6.14.) $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2, 3\},\{1,2,3\}\}$

Dabei sind die Teilmengen von A aus Darstellungsgründen nach der Anzahl ihrer Elemente (nach ihrer Mächtigkeit) angeordnet. In dieser Menge ist die Teilmengenbeziehung eine Halbordnung. So gilt z.B .:

(6.15.) (a) $\varnothing \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
(b) $\varnothing \subseteq \{2\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
(c) $\varnothing \subseteq \{3\} \subseteq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

Anschaulicher werden die Verhältnisse, wenn man die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ nach ihrer Mächtigkeit (ihrer Anzahl der Elemente) so in Zeilen anordnet, daß gleichmächtige Mengen in einer Zeile stehen, und dann die Mengen, zwischen denen die Teilmengenbeziehung besteht, durch eine Linie verbindet. Dabei sind die Relationspaare, die sich aus der Transitivität der Relation ergeben, gestrichelt gekennzeichnet (die Reflexivität ist nicht berücksichtigt):

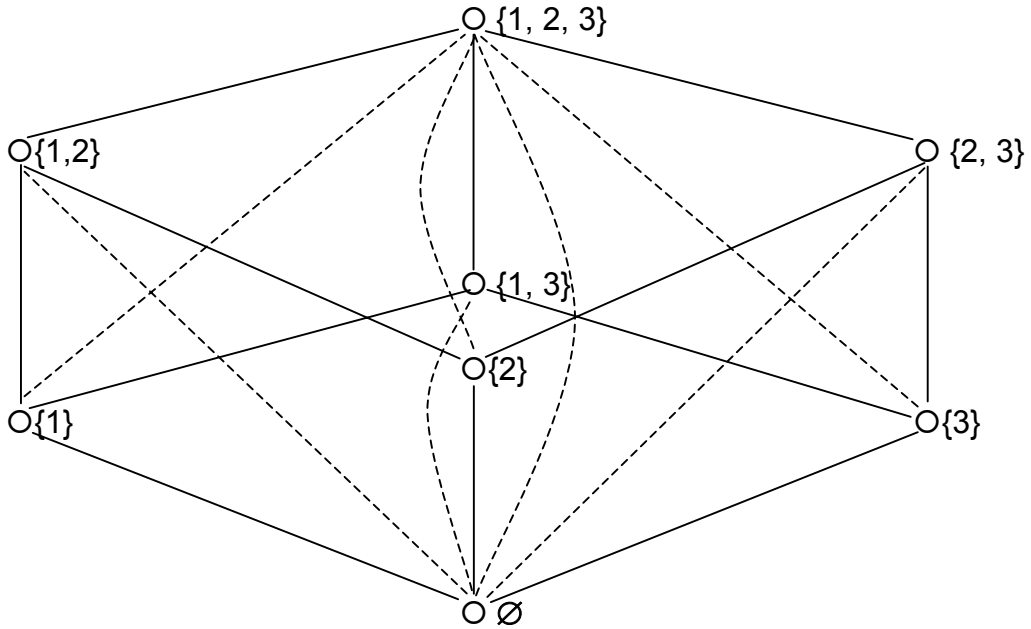


Abb. 6.9. Potenzmenge

Wie Abb. 6.9. zeigt, besteht nicht zwischen allen Elementen die Teilmengenbeziehung. So ist weder {1, 2} in {1, 3} noch {1, 3} in {1, 2} enthalten. Die Menge $\mathcal{P}(A)$ ist daher bezüglich der Teilmengenbeziehung nur unvollständig geordnet.

Eine Ordnungsrelation ist VOLLSTÄNDIG, wenn sie KONNEX ist:

Definition 6.28. *Konnex*

Eine Relation R ist konnex, wenn gilt:

$\bigwedge_x \bigwedge_y [x \neq y \Rightarrow R(x, y) \vee R(y, x)]$

Definition 6.29. *Vollständige Ordnungsrelation*

Eine Ordnungsrelation ist vollständig, wenn sie konnex ist.

Definition 6.30. *Ordnung, Kette*

Eine Halbordnung ist eine (vollständige oder lineare) ORDNUNG oder eine KETTE, wenn ihre Ordnungsrelation vollständig ist.

So ist z.B. die Relation *nicht größer* als eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen.

Beispiel: Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Die Ordnung von A läßt sich graphisch darstellen, indem man jedem Element aus A einen Punkt zuordnet und die einem Elementenpaar $\langle x, y \rangle$ zugeordneten Punkte mit einem Pfeil verbindet, wenn $R(x, y)$ gilt:

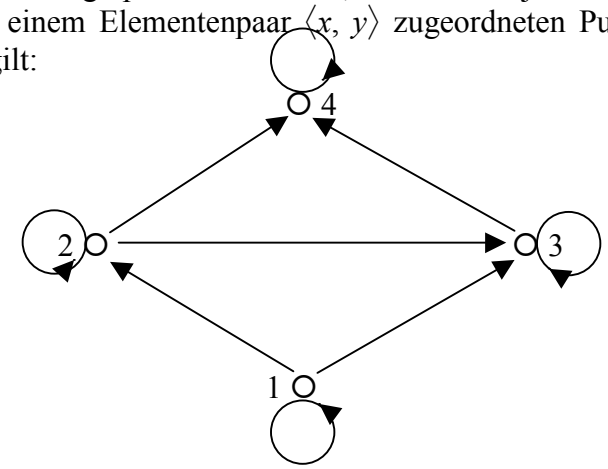


Abb. 6.10. Ordnung einer Menge

Abb. 6.10. ist die graphische Repräsentation der Ordnungsstruktur der Menge A bezüglich der Ordnungsrelation *nicht größer als.* Die Bezeichnungen LINEARE ORDNUNG und KETTE werden einleuchtender, wenn man Abb. 6.10. vereinfacht und anders anordnet. Wir lassen die Ringpfeile weg (Kennzeichen der Reflexivität) und alle Pfeile, die Transitivität anzeigen; wir ordnen die Punkte so an, daß alle Pfeile in die gleiche Richtung weisen:

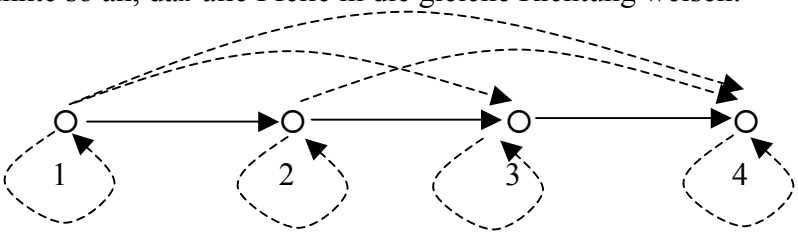


Abb. 6.11.

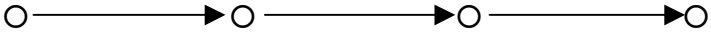


Abb. 6.12.

Nun gibt es auch Relationen, die von vornherein nicht reflexiv sondern irreflexiv sind:

Definition 6.31. *Irreflexiv*

Eine Relation R ist irreflexiv, wenn gilt:

$\bigwedge x \neg R(x,x)$

Eine irreflexive Relation kann nicht antisymmetrisch sein. Sie ist entweder unsymmetrisch oder asymmetrisch.

Definition 6.32. *Strikte Ordnungsrelation*

Eine Relation ist eine strikte Ordnungsrelation, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiele für strikte Ordnungsrelationen sind: größer als, kleiner als, echte Teilmenge von, Vorgänger von.

6.7. Operationen

Man kann OPERATIONEN als eine besondere Art von Relationen auffassen, wobei Elemente aus einer Menge M so miteinander verknüpft werden, daß wieder ein Element aus M entsteht. Bekannte Beispiele für Operationen sind die Addition und Multiplikation in der Menge der Zahlen. Dabei werden zwei Zahlen einer dritten zugeordnet, z.B. $1 + 2 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, oder allgemein: $x + y = z$ bzw. $xy = z$.

Andere Operationen sind die Verknüpfungen von Aussagen zu neuen Aussagen in der Aussagenlogik und die Verknüpfung von Mengen zu neuen Mengen in der Mengentheorie.

Die allgemeine Form einer Operation ist

(6.16.) $\circ(x_1,\ldots, x_n) = y$

Je nachdem wieviele Elemente an der Operation beteiligt sind, müssen ein- und mehrstellige Operationen unterschieden werden. Ein Beispiel für eine einstellige Operation ist die Negation in der Aussagenlogik, die einer Aussage p die Aussage ¬p zuordnet:

Zweistellige Operationen schreibt man meist in der Form

(6.17.) $x_1 \circ x_2 = y$

Es wurde bereits gesagt, daß man Operationen als besondere Art von Relationen auffassen kann. Sei $x \circ y = z$ eine zweistellige Operation auf einer Menge M. Dann ordnet die Operation das Paar $\langle x, y\rangle$ einem z zu derart, daß $z = x \circ y$. Man kann eine Operation daher entweder als eine zweistellige Relation $R\circ(\langle x, y\rangle, z)$ darstellen, oder was das gleiche bedeutet — als dreistellige Relation $R\circ(x, y, z)$. Allgemein ist dann eine n-stellige Operation eine zweistellige Relation mit einem n-tupel und einem weiteren Element $R\circ(\langle x_1,\ldots, x_n\rangle, y)$ bzw. eine n+1-stellige Relation $R\circ(x_1,\ldots, x_n, y)$.

Die Menge aller Paare $\langle x, y\rangle$ mit $x, y \in M$ ist die Paarmenge $M \times M$. Man kann eine zweistellige Operation in M daher auch auffassen als eine Abbildung von der Menge $M \times M$ in die Menge M:

$f\circ: M \times M \mapsto M$

Allgemein ist dann eine n-stellige Operation eine Abbildung von der n-tupel-Menge M^n (M^n ist definiert als $M^n = M \times M^{n-1}$) in M:

Die Struktur eines Systems, das aus einer Menge M und einer Menge O von in M definierten Operationen besteht, heißt ALGEBRAISCHE STRUKTUR. Ein System mit einer algebraischen Struktur kann man entsprechend ALGEBRAISCHES SYSTEM nennen. Algebraische Systeme sind z.B. das Zahlensystem, die Aussagenlogik und die Mengentheorie.

Durch die Kombination von Ordnungsstrukturen und algebraischen Strukturen erhält man komplexe Systeme.

Kapitel 7.
Grundbegriffe der Graphentheorie

Im anschaulichen Sinne sind Graphen Darstellungen wie die Abbildungen auf den vorangehenden Seiten. Diese Abbildungen stellen die Struktur von Systemen dar. Im mathematischen Sinn ist ein Graph jedoch die durch eine zweistellige Relation definierte Struktur eines Systems, die geometrische Darstellung also nur eine Abbildung eines solchen Systems.

Definition 7.1. *Graph*

Ein Graph besteht aus einer Menge M und einer in M definierten zweistelligen Relation R:

$\mathcal{G}=\langle M,R\rangle$ mit $R \subseteq M\times M$

Beispiel: $M = \{A,B,C,D\}$

$R = \{\langle A, B\rangle, \langle A, C\rangle, \langle D, C\rangle\}$

Definition 7.2. *Knoten*

Ist $\mathcal{G} = \langle M, R\rangle$ ein Graph, dann nennt man die Elemente von M Knoten des $\mathcal{G}$.

In unserem Beispiel sind die Knoten des Graphen die Elemente A, B, C und D.

Definition 7.3. *Kanten*

Ist $\mathcal{G} = \langle M, R\rangle$ ein Graph, dann nennt man ein Element aus R eine GERICHTETE KANTE von $\mathcal{G}$.

Die gerichteten Kanten in unserem Beispiel sind also die Paare $\langle A, B\rangle$, $\langle A, C\rangle$ und $\langle D, C\rangle$

Ein Graph in diesem abstrakten Sinne kann durch Abbildungen verschiedener Art anschaulich gemacht werden. So kann man z.B. die Elemente von $M\times M$ durch ein Gitter von Kreisen und die Elemente von R durch Kennzeichnung der entsprechenden Gitterkreise darstellen.

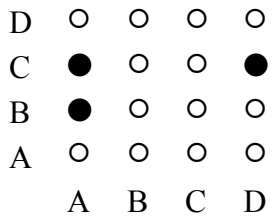


Abb. 7.1.

Beispiel: $M = \{A,B,C,D,E\}$

$R = \{ \langle A,A\rangle,\langle A,C\rangle,\langle A,D\rangle,\langle A,E\rangle,\langle B,A\rangle,$
$\langle B,C\rangle,\langle C,A\rangle,\langle C,B\rangle,\langle C,C\rangle,\langle C,D\rangle,$
$\langle C,E\rangle,\langle D,C\rangle,\langle D,E\rangle,\langle E,A\rangle,\langle E,B\rangle,$
$\langle E,C\rangle,\langle E,E\rangle\}$

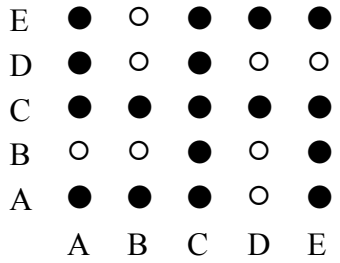


Abb. 7.2.

Aufgabe: Stellen Sie den Graphen $\mathcal{G} = \langle M, R \rangle$
$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle\}$
als Gitter dar.

In ähnlicher Weise kann man die Elemente von $M \times M$ als ein Netz von Quadraten darstellen, in dem die Elemente von R besonders gekennzeichnet werden.

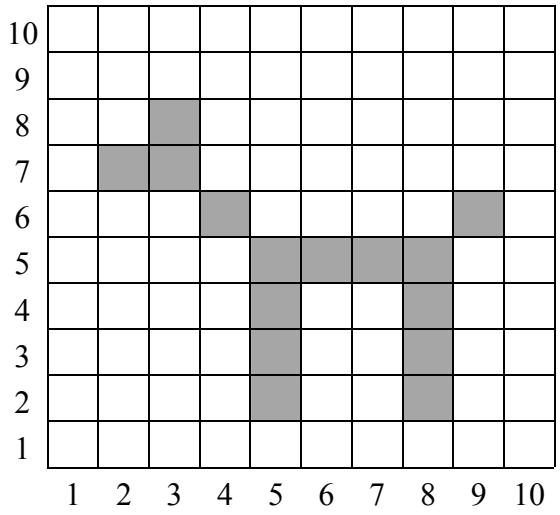


Abb. 7.3. Graph als Gitter

Aufgabe: Wie lautet der Graph, der Abbildung **Abb. 7.3**. zugrunde liegt?

$M =$

$R =$

Am häufigsten werden Graphen jedoch wie in Abb. 7.4. dargestellt. Ist $\mathcal{G} = \langle M, R \rangle$ ein Graph, so ordnet man jedem Elemente x_i aus M einen Punkt (Kreis, Quadrat, Dreieck etc.) a_i zu. Man erhält somit eine eineindeutige Abbildung von M auf eine Menge von Punkten (Kreisen, Quadraten, Dreiecken etc.). Jede Kante $\langle x_i, x_j \rangle$ aus R wird durch einen Pfeil dargestellt, der die den Elementen x_i und x_j zugeordneten Punkte $f(x_i) = a_i$ und $f(x_j) = a_j$ miteinander verbindet. Die so gewonnene Figur ist eine isomorphe Abbildung von $\mathcal{G}$. Dabei können die den Knoten von $\mathcal{G}$ zugeordneten Punkte beliebig auf der Zeichenebene angeordnet werden. Eine besonders übersichtliche Darstellung erhält man allerdings, wenn man die Knoten nach ihrem GRAD anordnet:

Definition 7.4. *Grad eines Knotens*

Unter dem Grad eines Knotens soll die Anzahl der verschiedenen Kanten verstanden werden, in denen der Knoten als erstes oder zweites Element vorkommt.

In dem der Abb. 7.4. zugrunde liegenden Graphen haben die Knoten folgende Grade:
$g(A) = 7,\ g(B) = 4,\ g(C) = 9,\ g(D) = 4,\ g(E) = 7$
Jetzt kann man die Knoten z.B. vom nächsten zum niedrigsten Grad von oben nach unten anordnen.

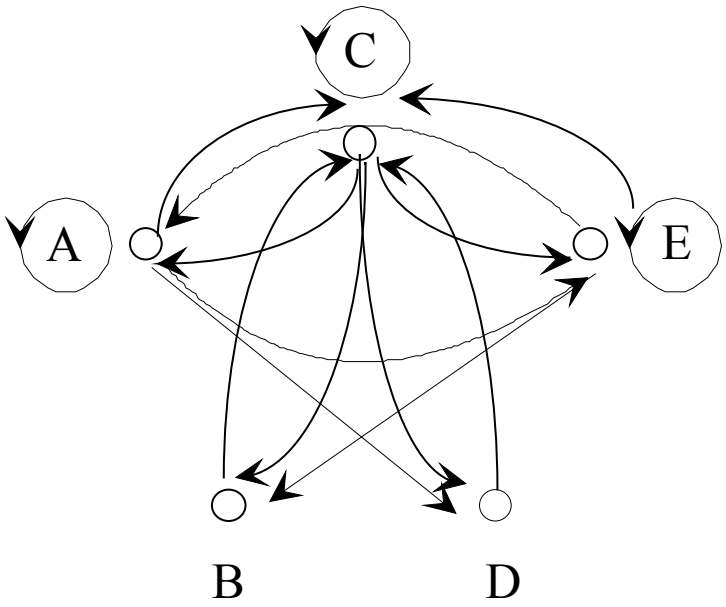


Abb. 7.4.

Graphen haben verschiedene Eigenschaften, die von den Eigenschaften der Relationen abhängen. So ist ein Graph $\mathcal{G}$ symmetrisch, wenn R symmetrisch ist, asymmetrisch, wenn R asymmetrisch ist, und vollständig, wenn R konnex ist.
Besonders wichtig für die Linguistik sind sog. Bäume.

Definition 7.5. *Baum*

Ein Graph $\mathcal{G} = \langle M, R\rangle$ heißt Baum, wenn er folgende Eigenschaften hat:

- R ist asymmetrisch und intransitiv;
- es gibt genau einen Knoten k, zu dem es keinen Knoten x gibt, so daß $\langle x, k\rangle$ eine Kante aus R ist; dieser Knoten heißt WURZEL.
- Für beliebige Knoten x, y, z aus M gilt: wenn $\langle x, z\rangle$ eine Kante ist, dann ist $\langle y, z\rangle$ keine Kante und umgekehrt.

Bedingung (2) besagt, daß es genau einen Knoten gibt, zu dem keine gerichteten Kanten hinführen. Bedingung (3) garantiert, daß zu allen anderen Knoten eine und nur eine Kante hinführt.

Beispiel: $M = \{ A, N, N', V, V', S\}$

$R = \{ \langle N',A\rangle, \langle N',N\rangle, \langle V',V\rangle, \langle S,N'\rangle, \langle S, V'\rangle\}$

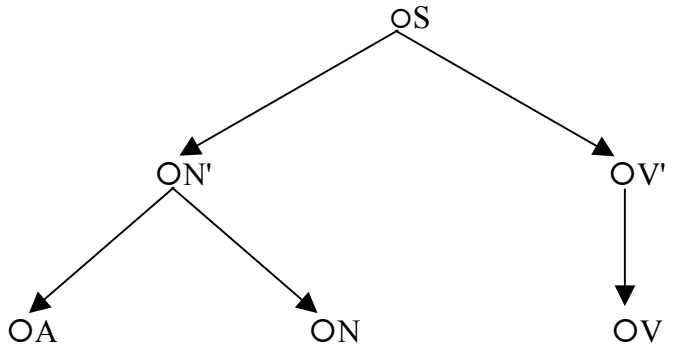


Abb. 7.5.

Jeder Baum enthält Knoten, von denen keine Kanten wegführen. Diese Knoten werden TERMINALE Knoten genannt.

Zu jeder zweistelligen Relation R kann man die konverse Relation R^{-1} bilden, indem man die geordneten Paare umdreht. Wenn also $\langle x, y\rangle$ in R ist, dann ist $\langle y, x\rangle$ in R^{-1} und umgekehrt. Man nennt R^{-1} KONVERSE von R.

Definition 7.6. *Konverse*

Eine Relation Q ist Konverse von einer Relation R (geschrieben R^{-1}), wenn gilt:

$\bigwedge x \bigwedge y\ [R(x,y) \Rightarrow R^{-1}(y, x)]$

Die Konverse von 'x ist Vater von y' ist 'y ist Kind von x' (bzw. 'y hat x zum Vater'). Die Konverse von 'x schlägt y' ist 'y wird von x geschlagen'.

Entsprechend kann man einen zu $\mathcal{G}$ konversen Graphen $\mathcal{G}^{-1}$ bilden.

Definition 7.7. *Konverse eines Graphen*

Ist $\mathcal{G} = \langle M, R\rangle$ ein Graph, dann ist $\mathcal{G}^{-1} = \langle M, R^{-1}\rangle$ die Konverse von $\mathcal{G}$.

In der Abbildung eines Graphen wird dabei einfach die Pfeilrichtung umgekehrt. So sieht z.B. der zu Abb. 7.5. konverse Graph wie folgt aus:

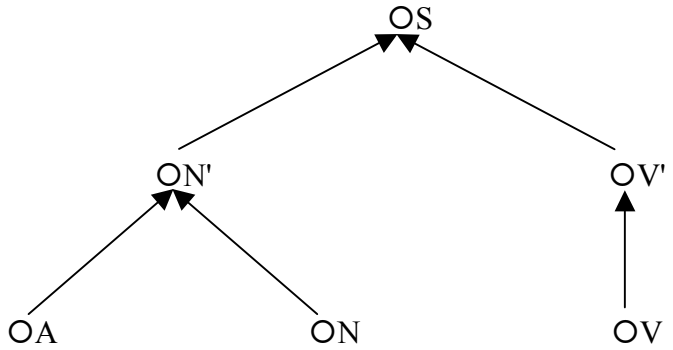


Abb. 7.6.

In der zeichnerischen Darstellung von Baumgraphen kann man die Pfeilspitzen weglassen, wenn man durch Konvention eine Richtung festlegt. Wir wollen dabei die Richtung von oben nach unten festlegen. Abb. 7.6. kann dann wie folgt dargestellt werden:

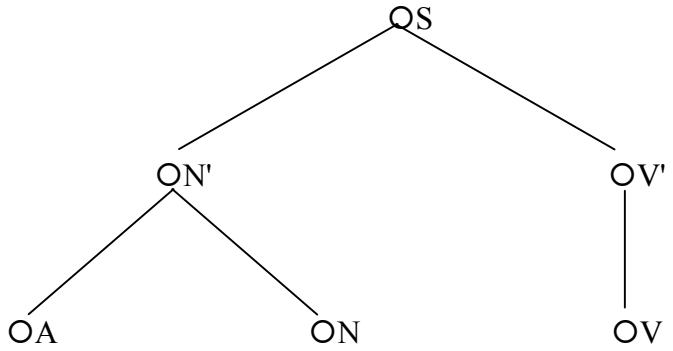


Abb. 7.7.

Wir wollen den zu einem Baum konversen Graphen ebenfalls Baum nennen, wenn keine Mißverständnisse möglich sind. Nach unserer Konvention müßte dann Abb. 7.7. wie in Abb. 7.8. dargestellt werden:

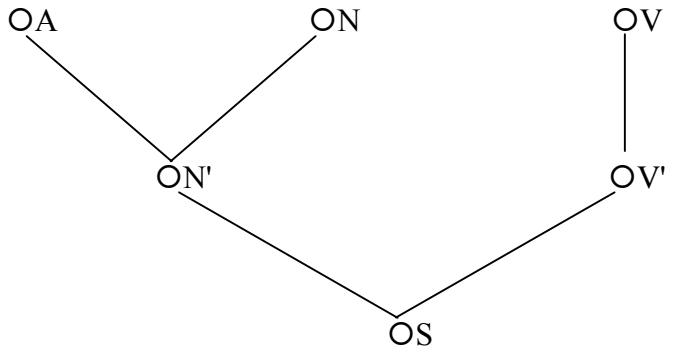


Abb. 7.8.

Sind in einer Menge M mehrere Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ definiert, so kann man die jeweiligen Graphen $\mathcal{G}_1 = \langle M, R_1 \rangle$, $\mathcal{G}_2 = \langle M, R_2 \rangle$, ..., $\mathcal{G}_n = \langle M, R_n \rangle$ zu einem Graphen $\mathcal{G} = \langle M, \{R_1, R_2, \ldots, R_n\} \rangle$ zusammenfassen.

In der konkreten Repräsentation eines solchen zusammengesetzten Graphen müssen dann allerdings die verschiedenen Relationen durch verschiedene zeichnerische Konventionen unterschieden werden.

Sei z.B. der der Abb. 7.7. zugrunde liegende Graph gegeben und außerdem der Graph $\mathcal{G}'$ mit

$R' = \{\langle N', V' \rangle, \langle A, N \rangle, \langle N, V \rangle\}$

dann kann der zusammengesetzte Graph wie folgt dargestellt werden:

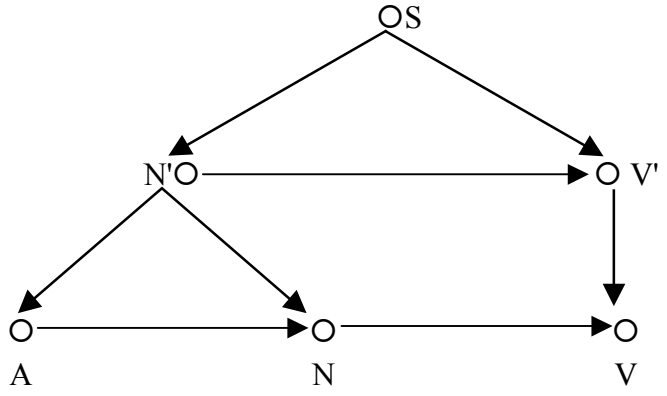


Abb. 7.9.

Auch hier kann eine Konvention festgelegt werden, indem man z.B. bestimmt, daß die zusätzlichen Kanten von links nach rechts angeordnet werden. Die entsprechende Darstellung ist dann mit Abb. 7.7. identisch.